Colles 2021-2022 S9 - Réduction 3 et normes

1 Questions de cours

Question de cours 1

Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est principal.

Question de cours 2

Montrer que si P annule u alors pour toute valeur propre de u, $P(\lambda) = 0$. Question subsidiaire : montrer que le spectre d'une matrice est fini. Question subsidiaire 2 : montrer que ce dernier est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal.

Question de cours 3

Soient I et J deux idéaux de A. Déterminer si $I \cap J$, $I \cup J$, $I + J$ sont ou non des idéaux de A (et le démontrer).

Question de cours 4

Énoncer et démontrer le lemme de décomposition des noyaux pour deux polynômes.

Question de cours 5

Montrer que s'il existe un polynôme scindé annulant u, alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, et que sur chaque bloc, l'endomorphisme induit est la somme d'un endomorphisme nilpotent et d'une homothétie.

Question de cours 6

Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.

Solution

Soit u diagonalisable. Alors $\prod(X - \lambda_i)$ (sans répétition) convient. (cela repose sur le fait que $P(QDQ^{-1}) = QP(D)Q^{-1}$ donc un polynôme annule une matrice ssi il annule une autre matrice qui lui est semblable).
Soit $P = \prod_i (X - \alpha_i)$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$. Par le lemme de décomposition des noyaux et en prenant une base adaptée à $\bigoplus_i \mathrm{Ker}(u - \alpha_i id_E)$ (quitte à enlever de la somme les espaces qui sont nuls), on obtient une matrice diagonale par blocs pour lequel chaque bloc est diagonal (car homothétie car $u_{|\mathrm{Ker}(u-\alpha_i id_E)}$ est une homothétie).

2 Exercices

Exercice 1

Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur, d'une symétrie, d'un endo nilpotent (à l'aide de l'indice de nilpotence).

Exercice 2

Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver les valeurs propres de A
2. A est-elle inversible ? Diagonalisable ?
3. Trouver Π_A
4. Trouver A^n par division euclidienne de X^n par Π_A.

Solution

1. 1
2. Oui, non
3. $(X-1)^2$
4. $X^n = (X-1)^2 Q_n + R_n$ avec $\deg(R_n) \leq 1$. On a donc $R_n = a_n X + b_n$. En évaluant en 1 on trouve $1 = R(1) = a_n + b_n$, et en dérivant puis en ré-évaluant en 1 on trouve $n = a_n$. D'où $R = nX + 1 - n$. On en déduit $A^n = Q\Pi_A(A) + R_n(A) = nA + (1-n)I_3$ (valable pour tout n).

Exercice 3 (Indice d'un endomorphisme)

Soir $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe un entier r, appelé indice de u, tel que la suite $(\ker(u^k))_k$ soit stationnaire à partir du rang r exactement. Indication : montrer que la suite des noyaux itérés est croissante (strictement puis stationnaire).
2. On suppose maintenant que u est nilpotent. Montrer que r est l'indice de nilpotence de u.

Solution

1. On remarque que la suite des noyaux itérés est croissante. Ensuite, on constate que le rang est une suite décroissante d'entiers naturels, donc elle stationne. (ou bien idem avec la suite des dimensions des noyaux qui elle croît et est bornée par n). (à montrer avec des epsilons ! $\varepsilon = 1/4$ par exemple)
   Autre point de vue : la suite des rangs est à valeurs dans un ensemble fini et est décroissante donc $\inf\{p \in \mathbb{N}, \mathrm{rg}(u^p) = \mathrm{rg}(u^{p+1}\}$ existe.
2. Si u est nilpotent, on sait qu'il existe un plus petit m tel que $u^m = 0$. Pour ce m, on a $\ker(u^m) = E \neq \mathrm{Ker}(u^{m-1})$ (car $\ker(f) = 0$ ssi f est nul). Donc par la question précédente, $m = r$.

Exercice 4

Trouver $Ann(\partial)$ (défini sur $\mathcal{C}\infty$).

Solution

C'est $\{0\}$.

Exercice 5

Montrer qu'un endo nilpotent en dimension fini vérifie : $\chi_u = \Pi_u \iff u$ cyclique $\iff u$ est semblable à un bloc de Jordan nilpotent

Solution

Si $\chi_u = \Pi_u = x^n$ alors tout vecteur x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$ convient. Pour montrer que la famille est libre, on évalue successivement la combinaison linéaire qui apparaît en les puissances de u.
Si il existe une telle base, il suffit d'écrire la matrice de u dans cette base.
Si u est semblable à un bloc de Jordan nilpotent, on voit que les diviseurs stricts X^k de $\chi_u = X^n$ n'annulent pas u (il faut décrire l'effet de X^n sur le bloc de Jordan).

Exercice 6

Soit $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A := (1 - \delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On considère $u : M \in E \mapsto M + \mathrm{Tr}(M)A \in E$. Trouver le polynôme minimal de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution

On voit que $u^2(M) = M + \mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(M + \mathrm{Tr}(M)A)A = M + 2\,\mathrm{Tr}(M)A + 0$ car A est de trace nulle. En particulier $u^2 = 2u - id_E$ donc le polynôme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ annule u. Donc $\pi_u = (X-1)^2$ car $u - id_E \neq 0$ (sinon u serait l'identité, ce qui est faux par exemple en prenant $M = I_n$: on a $u(I_n) = I_n + nA \neq I_n$).
Ainsi u ne peut pas être annulé par un polynôme scindé à racines simples (sinon π_u serait scindé à racines simples), donc u n'est pas diagonalisable.

Exercice 7

Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Indication : on pourra trouver le polynôme caractéristique de A puis considérer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur un espace stable F.

Solution

On trouve que $\chi_A = (X-1)^2(X+1)$ et que E_1, E_{-1} sont de dimension 1 chacun (A n'est pas diagonalisable).
Soit alors un espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^3$ stable par A.

1. Si $\dim(F) = 3$ alors $F = \{0\}$ ou $F = \mathbb{R}^3$.
2. Si $\dim(F) = 1$ alors F est une droite stable : $F = \mathrm{vect}(e)$, donc pour tout $x = \alpha e \in F$ on a $Ax = \alpha Ae = \lambda_x x = \alpha \lambda_x e$. Si x est non nul on obtient $Ae = \lambda_e e$ c'est à dire que e est un vecteur propre, et donc F est une des deux droites propres de A.
3. Si $\dim(F) = 2$: considérons l'endomorphisme v induit par u sur F. On a χ_v qui divise $(X-1)^2(X+1)$ et qui est de degré deux donc $\chi_v = (X-1)^2$ ou $\chi_v = (X+1)(X-1)$.
   (a) Si $\chi_v = (X+1)(X-1)$ alors v est diagonalisable et $F = E_1 \oplus E_{-1}$ (car F contient un vecteur propre de chaque droite E_i contient entièrement ces deux droites stables, et est de dimension 2).
   (b) Si $\chi_v = (X-1)^2$ alors F est contenu dans $\mathrm{Ker}((A - I_3)^2)$, et par un argument de dimension (lemme des noyaux !) on en déduit qu'ils sont égaux. On montre que c'est le plan $\{2x - 2y - z = 0\}$.

On a donc trouvé tous les espaces stables par A.

Exercice 8

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^2 + u + id_{\mathbb{R}^n} = 0$.

1. Soit F un espace stable par u. Soit $x \notin F$. Montrer que $\text{vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u et qu'il est en somme directe avec F.
2. (a) Montrer que si $n = 2p$ est pair et si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $(e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$ alors la matrice de u dans cette base est diagonale par blocs de blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que réciproquement si u est semblable à une telle matrice par blocs, alors n est pair et la base correspondante vérifie $e_{2k} = u(e_{2k-1})$.

   (c) En justifiant à l'aide de la question 1 l'existence de $p = \max(A)$ où $A := \{k \in \mathbb{N}, \exists (e_1, \dots, e_k)\,;\, (e_1, u(e_1), \dots, e_k, u(e_k)) \text{ libre}\}$, montrer qu'il existe une telle base et en particulier que n est pair.

Solution

1. On remarque que si $(x, u(x))$ est liée alors x est un vecteur propre (car non nul), en particulier pour une valeur propre λ réelle, qui vérifie $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ par hypothèse. C'est impossible, car les racines de ce trinôme sont complexes non réelles (ce sont j et j^2). Donc on a bien un plan $\mathcal{P} = \text{vect}(x, u(x))$. Ce plan est stable par u d'après l'hypothèse d'annulation faite sur u.
   On montre maintenant que $F \cap \mathcal{P} = \{0\}$. On suppose par l'absurde qu'il existe $y \neq 0$ dans $F \cap \mathcal{P}$. Par le même argument que précédemment, on voit que $\text{vect}(y, u(y))$ est un plan (stable par u). En particulier $F \cap \mathcal{P}$ est de dimension ≤ 2 et contient un plan donc est de dimension exactement deux. On en déduit par inclusion + dimension que $F \cap \mathcal{P} = \mathcal{P}$. En particulier $F \subset \mathcal{P}$ et en particulier $x \in F$ ce qui contredit notre hypothèse.
2. (a) Il suffit d'écrire la matrice de u dans la basse donnée.

   (b) On utilise la relation de la question 1.

   (c) L'ensemble A est non vide par la question 1 avec $F = \{0\}$. On note p son maximum. On a $(e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$ libre, et en utilisant la question 1 sur chaque $\text{vect}((e_k, u(e_k))$, on voit que ces derniers sont en somme directe :

$$\text{vect}((e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))) = \bigoplus_{k=1}^{p} \text{vect}((e_k, u(e_k)) := F.$$

   Enfin, il n'existe pas de $e_{p+1} \neq F$ car sinon, par la question 1, on trouve que $(e_1, u(e_1), \dots, e_{p+1}, u(e_{p+1}))$ serait libre, ce qui serait contradictoire avec la maximalité de p.

Exercice 9

Existe-t-il une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a un polynôme minimal de $X^2 + 1$?

Solution

Si $\pi_A = X^2 + 1$ on a en particulier $A^2 = -I_n$ et donc, en passant au déterminant, $\det(A)^2 = (-1)^n$. Une condition nécessaire sur n est donc qu'il soit paire. La condition est également suffisante car si n est pair on peut considérer la matrice diagonale par blocs de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Une autre manière de trouver la condition nécessaire est de voir que si $X^2 + 1$ est le polynôme minimal alors il n'y a pas de valeurs propres réelles. En particulier il ne peut pas être de degré impair d'après le théorème des valeurs intermédiaires (tout polynôme réel de degré impair a une racine réelle).

Exercice 10

1. Montrer que $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, A est diagonalisable ssi A^2 est diagonalisable.
2. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $M := \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ssi AB est diagonalisable.

Exercice 11

1. Dans $\mathbb{C}$ on peut prendre des racines de la matrice diagonale (non unicité).
2. $M^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$ est diagonalisable ssi AB et BA le sont. En effet le sens réciproque se voit (on prend comme matrice de passage $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ où P et Q sont les matrices de passage pour AB et BA). Pour le sens direct, on voit qu'un polynôme Q annule M^2 ssi il annule AB et BA. Enfin, on remarque que si AB est diagonalisable alors $BA = (A^-1P)D(A^-1P)^{-1}$ aussi, et vice-versa par symétrie des rôles.

Exercice 12

Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ annulé par un $P = QR \in \mathbb{K}[X]$. On suppose $Q \wedge R = 1$. Montrer que $\mathrm{Ker}(Q(u)) = \mathrm{Im}(R(u))$.

Solution

Lemme des noyaux + théorème du rang !!

Exercice 13

Montrer que l'application $N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto N(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14

Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{C}0([0,1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

Solution

On considère $f_n : x \mapsto x^n$ qui vérifie $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$

Exercice 15

Soit $E := \mathcal{C}1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ définit une norme sur E. Est-ce que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur E ?

Solution

Non.