# Espaces de Berkovich

Vincent Louatron, encadré par Jérôme Poineau

## Introduction

Vladimir Berkovich est un chercheur qui s'est intéressé à la géométrie analytique, et en particulier à la géométrie analytique non-archimédienne. Une des choses que le chercheur a pu remarquer au début de sa carrière est que les théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle sur $\mathbb{R}$ ne sont plus valables dans un cadre $p$-adique. En publiant son livre *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields* [Ber90], V.Berkovich a proposé un nouvel angle de vue sur la géométrie $p$-adique, notamment en créant ce que l'on appelle aujourd'hui les espaces de Berkovich. Ces espaces ont ainsi fourni au chercheur un cadre idéal pour ses recherches, notamment pour étudier l'existence ou non d'analogues $p$-adiques aux théorèmes "classiques" d'analyse fonctionnelle. De fait, en créant de tels objets, le chercheur a pu établir un lien entre des domaines des mathématiques à priori assez éloignés : l'analyse fonctionnelle d'une part, et l'algèbre et l'arithmétique d'autre part.

L'objectif de ce rapport est de présenter les bases des travaux de Berkovich dans ce livre. Nous étudierons donc les espaces de V.Berkovich en tant que tels, et nous tenterons de saisir les idées essentielles à leur construction. Dans un premier temps, nous étudierons le cas le plus simple, $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$, avant de s'intéresser aux espaces de Berkovich dans leur généralité. Enfin, nous étudierons une application de ces espaces à la construction de fonctions "analytiques", en un sens à définir.

## Remerciements

Je tiens à remercier Jérôme Poineau pour m'avoir donné de précieux conseils, et pour m'avoir guidé pendant ce stage.

Merci également à Antoine Dequay pour avoir relu mon rapport et pour avoir apporté un point de vue extérieur bien utile.

# Table des matières

# 1 Anneaux normés et spectre

## 1.1 Semi-norme sur un groupe

**Définition 1 (semi-norme)**

Soit $(M, +)$ un groupe abélien. On appelle **semi-norme** sur $M$ une application $\|.\| : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\|0\| = 0$,
- $\forall f, g \in M, \|f - g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

On dit d'une semi-norme qu'elle est **non-archimédienne** (ou **ultramétrique**) lorsqu'elle vérifie l'inégalité suivante, appellée inégalité triangulaire ultramétrique :

$$\forall f, g \in M,\ \|f - g\| \leqslant max(\|f\|, \|g\|).$$

Dans le cas contraire, on parle de semi-norme **archimédienne**.

**Exemple.** *La valeur absolue usuelle $|.|$ sur $\mathbb{R}$ est archimédienne, car on a par exemple :*
$|1 - (-1)| = 2 > 1 = max(|1|, |-1|)$.
*Un exemple de semi-norme non-archimédienne est fourni par les valeurs absolues p-adiques (p premier) sur $\mathbb{Z}$. En effet, si on prend un nombre premier $p$, alors, pour tous entiers $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (Si l'un des deux entiers $m$ ou $n$ est nul, la propriété est évidente) :*
*On écrit $n = p^a n'$ et $m = p^b m'$ où $a, b \in \mathbb{N}$ sont les valuations p-adiques de, respectivement, $n$ et $m$. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n - m = p^{min(a,b)} k$.*
*On en déduit alors, par définition de $|.|_p$, que $|n - m|_p \leqslant min(a, b) = min(|n|_p, |m|_p)$.*

**Remarque**

Soient $f, g \in M$. On peut donner une condition suffisante pour avoir égalité dans l'inégalité ultramétrique : il suffit que $\|f\| \neq \|g\|$ pour avoir $\|f - g\| = \max(\|f\|, \|g\|)$. En effet :
Supposons que $\|f\| \neq \|g\|$. Quitte à échanger les rôles, on suppose $\|f\| < \|g\|$.
Supposons par l'absurde que $\|f - g\| < \max(\|f\|, \|g\|)$.
On a alors $\|g\| > max(\|f\|, \|f - g\|)$.
Or, par inégalité ultramétrique, $\|g\| = \|(g - f) + f\| \leqslant \max(\|f - g\|, \|f\|)$, ce qui contredit l'inégalité

stricte précédente.

Ainsi, on a bien $\|f-g\| = max(\|f\|, \|g\|)$.

Plus généralement, pour une somme à $n$ éléments, le fait qu'un des éléments soit plus grand strictement (en norme) que tous les autres suffit pour avoir égalité ; ceci sera utile par la suite.

**Définition 2 (semi-norme induite)**

Soit $N$ un sous-groupe de $M$. On note $\pi$ la projection canonique sur le groupe quotient $M/N$.

On appelle **semi-norme induite** sur $M/N$ l'application définie pour $f \in M$ par :

$$\|\pi(f)\|_{res} := \inf\{\|g\| \mid g \in \pi^{-1}(\{f\})\}.$$

Pour alléger les notations on omettra, lorsque le contexte est clair, l'indice res.

**Remarque**

C'est bien une semi-norme sur $M/N$.

Par ailleurs, dans l'exemple de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec $p \in \mathbb{N}$ quelconque, on a pour $n \in \mathbb{N}$ $\|\pi(n)\|_{res} = \|b\|$ où $n = ap + b$ est la division euclidienne de $n$ par $p$. On peut en effet vérifier que l'infimum est ici un minimum.

**Proposition 1**

La semi-norme induite sur $M/N$ est une norme si et seulement si $N$ est fermé dans $(M, \|.\|)$.

*Preuve.* On procède par double implication.

Si $\|.\|_{res}$ est une norme :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $N$. On note $x$ sa limite.

On a $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Or, par définition, $\|\pi(x_n - x)\|_{res} \leqslant \|x_n - x\|$ donc $\|\pi(x_n - x)\|_{res} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi(x)$. Puisque cette suite est la suite nulle, on en déduit par unicité de la limite (ce qui est légitime ici car, puisque $\|.\|_{res}$ est une norme, $(M/N, \|.\|_{res})$ est séparé) que $\pi(x) = 0$, et donc que $x \in N$.

Ainsi, $N$ est fermé.

Réciproquement : Si $N$ est fermé :

Soit $X \in M/N$ tel que $\|X\|_{res} = 0$. Soit $x \in M$ tel que $X = \pi(x)$.

Par caractérisation de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in M$ tel que $0 \leqslant \|y_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et pour lequel $\pi(y_n) = X$.

On obtient ainsi une suite $(y_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $N$ (car $\pi(y_n - x) = 0$), qui converge car $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(M, \|.\|)$. Par passage à la limite dans la relation précédente on obtient par ailleurs, si on note $y$ une limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $\|y\| = 0$ et donc $y \in N$.

Or $N$ est fermé, donc $(y_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $N$. Plus précisément, $y - x \in N$ donc comme $N$ est un groupe, on obtient $x \in N$.

Ainsi, $X = 0_{M/N}$ et on en déduit donc que $\|.\|_{res}$ vérifie l'axiome de séparation.

□

### 1.2 Anneaux normés et spectre

**Définition 3 (semi-norme et norme sur un anneau)**

Soit $(\mathscr{A}, +, \times)$ un anneau unitaire. On appelle **semi-norme** sur $\mathscr{A}$ une semi-norme sur le groupe $(\mathscr{A}, +)$ telle que :

(1) : $0_{\mathscr{A}} \neq 1_{\mathscr{A}} \Rightarrow \|1_{\mathscr{A}}\| = 1$,

(2) : $\forall f, g \in M, \|fg\| \leqslant \|f\|.\|g\|$ (sous-multiplicativité).

On appelle alors **norme** une semi-norme vérifiant l'axiome de séparation, c'est à dire si $0_{\mathscr{A}}$ est le seul élément de semi-norme nulle.

Dans le cas où (2) est une égalité, on parle de semi-norme **multiplicative**, et si de plus la semi-norme est une norme, on parle de **valeur absolue**.

Par la suite, on s'intéressera essentiellement aux semi-normes sur des anneaux.

On pourra aussi rencontrer la terminologie de valuation pour désigner une valeur absolue. Un corps valué désignera ainsi un corps muni d'une valeur absolue. Cependant, pour ne pas confondre avec la notion de valuation sur un anneau commutatif (les valuations $p$-adiques sur $\mathbb{Z}$ en sont des exemples), on utilisera le terme de valeur absolue.

On introduit également la notion de multiplicativité-puissance (*power-multiplicativity* en anglais) : On dit que $\|.\|$ vérifie l'axiome de multiplicativité-puissance lorsque $\forall f \in \mathscr{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f^n\| = \|f\|^n$.

**Remarque**

On peut alors remarquer, si $\|.\|$ est une semi-norme, que :
$\|-1\| = \|0-1\| \leqslant \|1\|$ d'une part,
$\|1\| = \|0-(-1)\| \leqslant \|-1\|$ d'autre part.
On a alors :

$$\|-1\| = \|1\| = 1.$$

On a d'ailleurs, pour tout $f \in \mathscr{A}$, les inégalités $\|-f\| = \|0-f\| \leqslant \|f\|$ et, de même, $\|f\| = \|0-(-f)\| \leqslant \|-f\|$ .
D'où :

$$\|-f\| = \|f\|.$$

De plus, si $\|.\|$ est multiplicative, la semi-norme se comporte également de la manière que l'on peut attendre avec l'inverse pour la loi $\times$ :

$$\forall f \in \mathscr{A}^{\times},\ \|ff^{-1}\| = 1, \text{ donc par multiplicativité, } \|f^{-1}\| = \|f\|^{-1}.$$

On verra plus tard (c.f preuve du théorème 1) que, pour avoir la multiplicativité, il suffit que la semi-norme vérifie ce dernier point (passage à l'inverse) et qu'elle vérifie l'axiome de multiplicativité-puissance.

On ne peut bien sûr pas parler d'homogénéité tant que l'on ne se place pas dans le cas d'espaces vectoriels, ou plus généralement de $\mathscr{A}$-modules, mais ces propriétés permettent de voir qu'une norme sur un anneau ressemble, en un certain sens (notamment avec le passage à l'opposé et à l'inverse), à la notion de norme sur un espace vectoriel avec laquelle on a l'habitude de travailler.
On définit alors naturellement la notion d'anneau semi-normé et normé, objets fondamentaux dans la théorie des espaces de Berkovich :

**Définition 4 (Anneaux normés et complets)**

On appelle :

- Anneau **semi-normé** (resp. **normé**) un couple $(\mathscr{A}, \|.\|)$ où $\mathscr{A}$ est un anneau, et $\|.\|$ est une semi-norme (resp. une norme).
- **Anneau de Banach**, (ou **complet**) un anneau normé $(\mathscr{A}, \|.\|)$ complet pour sa norme.

Ce sont avec des anneaux de Banach commutatifs unitaires que nous travaillerons dans toute la suite. Par ailleurs, la norme pour l'anneau de base $\mathscr{A}$ sera notée $|.|$.

**Définition 5**

On dit d'une semi-norme $|.|'$ d'un anneau semi-normé $(\mathscr{A}, |.|)$ qu'elle est **bornée** si :

$$\exists C > 0\,;\, \forall f \in \mathscr{A}, |f|' \leqslant C|f|.$$

On prêtera une attention particulière au fait que la notion de semi-norme bornée dépend ici de la semi-norme $|.|$ choisie au départ, à l'instar de la notion de continuité sur un espace vectoriel normé qui dépend de la norme dont on munit l'espace vectoriel.

**Remarque**

On pourra prendre $C = 1$ lorsque la semi-norme $|.|'$ vérifie l'axiome de multiplicativité-puissance (et donc à fortiori lorsqu'elle est multiplicative). En effet, si une telle semi-norme est bornée, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\forall f \in \mathscr{A}$, $|f^n|' \leqslant C|f^n|$ d'où $(|f|')^n \leqslant C|f|^n$ par multiplicativité-puissance.
On en déduit donc que $|f|' \leqslant C^{1/n}|f|$.
Ceci valant pour tout entier $n$, on en déduit en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ que $|.|' \leqslant 1.|.|$.

**Définition 6 (Spectre)**

Soit $(\mathscr{A}, |.|)$ un anneau de Banach commutatif. On appelle **spectre de** $\mathscr{A}$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives et bornées sur $\mathscr{A}$, muni de la topologie la moins fine rendant les applications $|.| \mapsto |f|$, avec $f \in \mathscr{A}$, continues (au sens des espaces métriques).
On notera $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ cet espace.

Berkovich choisit d'adopter un point de vue original sur les points de cet ensemble, au sens où il choisit de voir les éléments $f$ de l'anneau $\mathscr{A}$ comme des fonctions, qu'on évaluerait en un "point" $x \in \mathcal{M}(\mathscr{A})$. Cela justifie ainsi la notation $|f(x)|$ pour désigner le réel positif $|f|_x$, c'est à dire le réel obtenu en évaluant la fonction $|.|_x : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ en $f$. Cette remarque étant très qualitative, il est nécessaire de s'intéresser d'un peu plus près à la construction de l'élément que Berkovich note $f(x)$, c'est à dire à la construction du corps résiduel complété. La construction est la suivante :

Soit $x \in \mathcal{M}(\mathscr{A})$. On note $|.|_x$ la semi-norme associée à $x$.

On considère $\mathscr{P}_x := \{f \in \mathscr{A} \,;\, |f|_x = 0\}$ le "noyau" de $\mathscr{A}$ associé à $x$. C'est alors un idéal premier de $\mathscr{A}$. En effet :

- Pour tous $f, g \in \mathscr{P}_x$, on a $|f - g|_x \leqslant |f|_x + |g|_x = 0$ donc $f - g \in \mathscr{P}_x$.
  Ainsi, puisque $\mathscr{P}_x$ contient 0, on en déduit que c'est un sous-groupe de $(\mathscr{A}, +)$.
  De plus, si $f \in \mathscr{P}_x$ et $g \in \mathscr{A}$, alors $|fg|_x = |f|_x|g|_x = 0$ car $|.|_x$ est multiplicative.
  Donc $\mathscr{P}_x$ est bien un idéal de $\mathscr{A}$.
- Soient $f, g \in \mathscr{A}$ tels que $fg \in \mathscr{P}_x$.
  On a alors $|fg|_x = 0$. Or, par définition de $\mathcal{M}(\mathscr{A})$, $|.|_x$ est multiplicative. Il s'ensuit alors $|f|_x|g|_x = 0$.
  Ainsi, puisque $(\mathbb{R}, +, \times)$ est intègre, on en déduit que $\mathscr{P}_x$ est premier.

De plus, $\mathscr{P}_x$ est fermé. En effet :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}_x$ qui converge. Notons $f$ sa limite.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par convergence, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N$, $|f_n - f|_x \leqslant \varepsilon$.

De plus, par définition de $\mathscr{P}_x$, $|f_n|_x = 0$.

On en déduit donc, par inégalité triangulaire : $|f|_x \leqslant |f_n|_x + |f - f_n|_x \leqslant \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $|f|_x = 0$ et donc que $f \in \mathscr{P}_x$.

Ainsi, $\mathscr{P}_x$ est fermé. On en déduit que la semi-norme induite sur le quotient $\mathscr{A}/\mathscr{P}_x$ est une norme.

On remarque alors que la valeur de $|f|_x$ ne dépend que de la valeur de $\pi(f)$ où $\pi$ est la projection canonique sur $\mathscr{A}/\mathscr{P}_x$. En effet, si $f$ et $f'$ sont deux représentants d'une même classe d'équivalence pour le quotient $\mathscr{A}/\mathscr{P}_x$, alors $|f - f'| = 0$. Il s'ensuit alors, par inégalité triangulaire, $|f| \leqslant |f - f'| + |f'| = |f'|$ et réciproquement, d'où $|f| = |f'|$.

**Définition 7 (Corps résiduel complété)**

Soit $(\mathscr{A}, |.|)$ un anneau de Banach commutatif, et $x \in \mathcal{M}(\mathscr{A})$. On reprend les notations précédentes pour $\mathscr{P}_x$.

On appelle **corps résiduel complété associé à** $x$ le complété de $Frac(\mathscr{A}/\mathscr{P}_x)$. On note $\mathscr{H}(x)$ ce corps. L'image de $f$ par l'application $\mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}/\mathscr{P}_x \hookrightarrow Frac(\mathscr{A}/\mathscr{P}_x) \hookrightarrow \mathscr{H}(x)$ sera alors notée $f(x)$.

Ainsi, partant d'un anneau $\mathscr{A}$ et d'une semi-norme $|.|_x$ sur cet anneau, cette construction permet de renverser la situation et de considérer $f$ non plus comme un point mais comme une fonction et, vice-versa, $x$ comme un point et non plus comme une fonction.

Le point de vue "renversé" adopté ici n'est pas sans rappeler le point de vue de l'analyse fonctionnelle, ce qui mérite d'être soulevé ici car Berkovich l'utilise pour l'appliquer à des notions relevant pourtant de l'algèbre et de l'arithmétique, domaines à priori éloignés de l'analyse.

La notion sera évoquée au travers d'exemples dans la seconde partie traitant du cas du spectre de $\mathbb{Z}$, où il sera plus aisé de comprendre l'utilité de ce point de vue. La notion sera également largement utilisée dans la partie suivnte, notamment pour décrire les espaces de Berkovich.

### 1.3 Propriétés générales du spectre

On va maintenant s'intéresser à quelques propriétés générales (notamment topologiques) du spectre précédemment défini. Nous allons avant cela énoncer un lemme qui servira dans la preuve du théorème 1 (qui regroupera ces propriétés), et ce dans une optique d'alléger la lecture de la preuve de ce théorème.

**Lemme 1**

Soit $(\mathscr{A}, |.|)$ un anneau de Banach commutatif et $r > 0$. On note $\mathscr{S}_r$ l'ensemble des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n$ à coefficients dans $\mathscr{A}$ vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty$. On le munit de $\|.\|$ (c'est bien une norme), définie par $\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n$.

Alors $(\mathscr{S}_r, \|.\|)$ est un anneau de Banach commutatif, et pour tout $a \in \mathscr{A}$, $1 - aT$ est inversible dans $\mathscr{S}_r$ si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n r^n < +\infty$.

*Preuve.* On admettra que $(\mathscr{S}_r, \|.\|)$ est un anneau de Banach commutatif.

Considérons un élément $a \in \mathscr{A}$.

D'une part, si $1 - aT$ est inversible, il existe alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n T^n \in \mathscr{S}_r$ telle que $(1 - aT)\sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n = 1$.

C'est à dire : $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n - a\sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^{n+1} = 1$.

On a alors, en identifiant, $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = a.b_n$.

On obtient alors que l'inverse de $1 - aT$ est $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n T^n$, et par hypothèse cet inverse est dans $\mathscr{S}_r$ et vérifie donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n T^n < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n T^n < +\infty$ :

Alors on a (les séries convergent bien ici) : $(1 - aT)\sum_{n=0}^{+\infty} a^n T^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n T^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} T^{n+1} = a^0 T^0 = 1$ et donc $1 - aT$ est bien inversible, l'inverse étant lui aussi bien dans $\mathscr{S}_r$. □

**Théorème 1**

Si $(\mathscr{A}, |.|)$ est un anneau de Banach commutatif non trivial (et unitaire), alors $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ est non vide et compact.

*Preuve.* Il s'agit dans un premier temps de montrer que $\mathcal{M}(\mathscr{A}) \neq \emptyset$, ce qui est loin d'être trivial.

On se ramène tout d'abord au cas où $\mathscr{A}$ est un corps, quitte à remplacer $\mathscr{A}$ par $\mathscr{A}/I$ où $I$ est un idéal maximal quelconque de $\mathscr{A}$. En effet, si l'on parvient à montrer que $\mathcal{M}(\mathscr{A}/I)$ est non vide, alors on aura immédiatement que $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ est non vide.

Posons $S$ l'ensemble des semi-normes (non nécessairement multiplicatives) qui soient bornées et non nulles sur $\mathscr{A}$.

L'ensemble $S$ est non vide car la norme $|.|$ sur $\mathscr{A}$ est non nulle (car $|1| = 1$ puisque l'on a ici supposé $\mathscr{A} \neq \{0\}$) et bornée, par définition.

Montrons tout d'abord que $S$ vérifie les conditions du lemme de Zorn :

- La relation $\preceq$ définie sur $S$ par $|.| \preceq |.|' \Leftrightarrow (\forall f \in \mathscr{A},\ |f| \leqslant |f|')$ munit $S$ d'un ordre partiel. (l'ordre n'est pas nécessairement total : par exemple sur $\mathbb{Z}$, $|3|_3 = 1/3 < 1 = |3|_5$ mais $|5|_3 = 1 > 1/5 = |5|_5$)
- Soit $(|.|_i)_{i\in I}$ une famille non vide totalement ordonnée d'éléments de $S$.

On pose, pour tout $f \in \mathscr{A}$, $|f|' := \inf_{i\in I}(|f|_i)$. Montrons que ceci définit un minorant de $(|.|_i)_{i\in I}$ pour $\preceq$.

L'application $|.|' : f \mapsto |f|'$ est bien définie sur $\mathscr{A}$ car $\{|f|_i\,;\, f \in \mathscr{A}\}$ est une partie non vide (car contenant 1) de $\mathbb{R}_+$ donc possède une borne inférieure.

De plus, l'application $|.|'$ ainsi définie vérifie :

- $|0|' = 0$ car $\forall i \in I$, $|0|_i = 0$.
- Soient $f, g \in \mathscr{A}$.

  On a, pour tout $i \in I$, $|f-g|_i \leqslant |f|_i + |g|_i$ car ce sont des semi-normes.

  On en déduit donc que, pour tout $i \in I$, $\inf_{j\in I}(|f-g|_j) \leqslant |f|_i + |g|_i$.

  D'où, en passant à l'infimum : $|f-g|' = \inf_{j\in I}(|f-g|_j) \leqslant \inf_{i\in I}(|f|_i + |g|_i)$.

  On remarque ici que, l'ordre étant total sur la famille $(|.|_i)_{i\in I}$, on a l'égalité $\inf_{i\in I}(|f|_i + |g|_i) = \inf_{i\in I}(|f|_i) + \inf_{j\in I}(|g|_j)$.

  En effet, il est clair que $\inf_{i\in I}(|f|_i) + \inf_{j\in I}(|g|_j) \leqslant \inf_{i\in I}(|f|_i + |g|_i)$.

  D'autre part, pour tous $i_0, j_0 \in I$, on a :

  - Ou bien $|.|_{i_0} \preceq |.|_{j_0}$, auquel cas $\inf_{i\in I}(|f|_i + |g|_i) \leqslant |f|_{i_0} + |g|_{i_0} \leqslant |f|_{i_0} + |g|_{j_0}$.
  - Ou bien $|.|_{j_0} \preceq |.|_{i_0}$, auquel cas $\inf_{i\in I}(|f|_i + |g|_i) \leqslant |f|_{j_0} + |g|_{j_0} \leqslant |f|_{i_0} + |g|_{j_0}$.

  Dans tous les cas, on obtient, après un passage à l'infimum en deux étapes :

  $\inf_{i\in I}(|f|_i + |g|_i) \leqslant \inf_{i\in I}(|f|_i) + \inf_{j\in I}(|g|_j)$. On en déduit donc l'égalité.

  Finalement, on obtient bien l'inégalité triangulaire $|f-g|' = \inf_{j\in I}(|f-g|_j) \leqslant \inf_{i\in I}(|f|_i + |g|_i) = \inf_{i\in I}(|f|_i) + \inf_{j\in I}(|g|_j) = |f|' + |g|'$.
- Soit $i_0 \in I$. Puisque toutes les $|.|_i$ sont bornées, on applique cette propriété à $i_0$ : on trouve alors $C > 0$ tel que : $\forall f \in \mathscr{A}$, $|f|_{i_0} \leqslant C|f|$.

  On en déduit donc immédiatement : $\forall f \in \mathscr{A}$, $|f|' \leqslant C|f|$.

On en conclut que $(|.|_i)_{i\in I}$ possède un minorant, à savoir $|.|'$.

Ainsi, d'après le lemme de Zorn, $S$ possède un élément minimal. Quitte à se ramener au complété de $\mathscr{A}$, on peut supposer que cet élément minimal est la norme $|.|$ de $\mathscr{A}$. En effet, il est clair que $|.|$ est un minorant de $S$, et que si cette norme est multiplicative sur $\widetilde{\mathscr{A}}$, où $\widetilde{\mathscr{A}}$ désigne le complété de $\mathscr{A}$, alors elle le sera à fortiori sur $\mathscr{A}$.

Montrons alors que cette norme est multiplicative. Procédons en trois étapes.

Premièrement, montrons que la norme vérifie l'axiome de multiplicativité-puissance. On va pour cela utiliser le lemme 1 précédemment démontré.

On remarque que l'on a déjà, par sous-multiplicativité du fait que $|.|$ est une norme sur l'anneau $\mathscr{A}$, l'inégalité $|f^n| \leqslant |f|^n$ pour tous $f \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $|f^n| < |f|^n$. L'idée est ici de montrer que $f - T$ n'est pas inversible dans l'anneau $\mathscr{S}_r$ avec $r = |f^n|^{1/n}$ afin d'aboutir à une contradiction sur la minimalité de $|.|$.

D'après le lemme, il suffit d'étudier la série de terme général $|f^{-1}|^k r^k$.

On constate que, pour $k \in \mathbb{N}$, en notant $k = np + q$ avec $q \in [\![0, n-1]\!]$ (division euclidienne de $k$ par $n$), on a, par sous-multiplicativité :

$$|f^k| \leqslant |f^n|^p |f^q| \text{ et } |f^{-k}|\,|f^k| \geqslant |f^k f^{-k}| = 1.$$

On en déduit donc : $|f^{-k}|r^k = |f^{-k}|\,|f^n|^{k/n} \geqslant \frac{1}{|f^k|}\,|f^n|^{p+q/n} \geqslant \frac{|f^n|^p\,|f^n|^{q/n}}{|f^n|^p\,|f^q|} = \frac{|f^n|^{q/n}}{|f^q|}$.

On obtient alors une minoration indépendante de $k$ : en effet, en posant $\varepsilon := \min\limits_{q \in [\![0,n-1]\!]} \left( \dfrac{|f^n|^{q/n}}{|f^q|} \right)$, on obtient $|f^{-k}|r^k \geqslant \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de $n$ (et en particulier indépendant de $k$).

On en conclut que $f - T$ n'est pas inversible. Puisque ce polynôme est de degré 1, il est alors irréductible.

On considère alors $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{S}_r / < f - T >$ l'unique morphisme d'anneaux envoyant $f$ sur $T$.

On a alors $\|\phi(f)\| = \|T\| \leqslant r < |f|$ par hypothèse (où $\|.\|$ est la norme sur $\mathscr{S}_r$ précédemment définie).

On a alors trouvé une norme [1] sur $\mathscr{A}$, à savoir $\|\phi(.)\|$, qui est dans $S$ et qui est strictement plus petite, pour l'ordre $\preceq$, que $|.|$, ce qui contredit sa minimalité dans $S$.

On en conclut que $|.|$ vérifie l'axiome de multiplicativité-puissance.

Deuxièmement, montrons qu'elle se comporte d'une manière satisfaisante par passage à l'inverse, c'est à dire que pour tout $f \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$, $|f^{-1}| = |f|^{-1}$.

Quitte à remplacer $f$ par son inverse, supposons par l'absurde qu'il existe $f \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$ tel que $|f|^{-1} < |f^{-1}|$.

De la même manière que précédemment, avec $r = |f^{-1}|$, et en utilisant la multiplicativité-puissance pour avoir $|f^{-k}|r^{-k} = |f^{-1}|^k\,|f^{-1}|^{-k} = 1$, on montre que $|.|$ n'est pas minimale en exhibant le même morphisme que précédemment (ce qui change ici est le rayon $r$ considéré).

On en conclut donc que $|f|^{-1} = |f^{-1}|$ pour tout $f \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$.

1. On peut vérifier que $\phi$ est injective, et donc que $\|.\|$ vérifie l'axiome de séparation. Pour le reste, on passe par la définition de semi-norme induite.

Finalement, on peut déduire des deux points précédents qu'elle est multiplicative :

On a en effet, pour tous $f, g \in \mathscr{A}$, $\frac{1}{|fg|} = |g^{-1}f^{-1}| \leqslant |f|^{-1}\,|g|^{-1}$, d'où la multiplicativité en combinant cette inégalité avec l'inégalité de sous-multiplicativité.

On en déduit finalement que $\mathcal{M}(\mathscr{A}) \neq \emptyset$.

On s'intéresse maintenant à la compacité. Considérons l'application suivante :

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}(\mathscr{A}) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{f\in\mathscr{A}} [0, |f|] \\ x & \mapsto & (|f(x)|)_{f\in\mathscr{A}} \end{pmatrix}$$

L'injectivité de cette application est trivialement vérifiée : si deux applications (ici deux semi-normes) coïncident en chaque point de leur ensemble de départ (qui est ici bien commun : c'est $\mathscr{A}$), alors elles sont égales. On considèrera désormais l'application $\phi : \mathcal{M}(\mathscr{A}) \to \phi(\mathcal{M}(\mathscr{A}))$, que l'on notera toujours $\phi$. Cette application est donc bijective. Reste à montrer sa continuité et celle de sa bijection réciproque.

L'application $\phi$ est continue car la topologie sur le produit $\displaystyle\prod_{f\in\mathscr{A}} [0, |f|]$ est la topologie produit, donc la moins fine rendant les projections $\pi_f : x \mapsto (|f(x)|)_{f\in\mathscr{A}}$ continues, ce qui est précisément la définition de la topologie choisie pour $\mathcal{M}(\mathscr{A})$. Le même argument vaut pour $\phi^{-1}$, et $\phi$ est donc un homéomorphisme.

Montrons alors que $\phi(\mathcal{M}(\mathscr{A}))$ est fermé.

Soit alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\phi(\mathcal{M}(\mathscr{A}))$, dont on notera $y$ la limite dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{M}(\mathscr{A})}$. On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{A}$, $y_n(f) = |f(x_n)| = |f|_{x_n}$.

La convergence est ici à comprendre au sens des suites de suites de réels :

$\forall f \in \mathscr{A}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\,; \forall n \geqslant N, |y_n(f) - y(f)|_\infty < \varepsilon.$

Autrement dit : $\forall f \in \mathscr{A}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}\,; \forall n \geqslant N$, $||f|_{x_n} - y(f)| \leqslant \varepsilon$.

On peut alors définir l'application, notée $|.|_x$ en posant, pour tout $f \in \mathscr{A}$, $|f|_x := y(f) \in \mathbb{R}_+$.

La notation $|.|_x$ n'est pas anodine car les propriétés nécessaires pour bien définir une semi-norme multiplicative sur $\mathscr{A}$ s'obtiennent par passage à la limite. Si l'on prend un $f \in \mathscr{A}$ fixé, on a :

- $|1|_{x_n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ c'est à dire $|f|_x = 1$. On a le même résultat pour 0.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$, et pour tous $f, g \in \mathscr{A}$, on a :
  - $|f - g|_{x_n} \geqslant |f|_{x_n} + |g|_{x_n}$
  - $|fg|_{x_n} = |f|_{x_n}|g|_{x_n}$

Par passage à la limite dans une inégalité large, on obtient $|f-g|_x \geqslant |f|_x + |g|_x$ ainsi que $|fg|_x = |f|_x|g|_x$.

Ainsi, $|.|_x$ définit bien un élément de $\mathcal{M}(\mathscr{A})$, et par définition $y = \phi(x)$. Ainsi, $y \in \phi(\mathcal{M}(\mathscr{A}))$.
Donc $\phi(\mathcal{M}(\mathscr{A}))$ est un fermé. Puisqu'il est inclus dans un compact, il est lui aussi compact.
En conclusion, $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ est homéomorphe à un espace topologique compact, et est donc compact. □

**Remarque**

On peut d'ores et déjà comprendre que le spectre $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ est très différent de l'anneau $\mathscr{A}$ à partir duquel il est défini. En particulier, il est séparé, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour $\mathscr{A}$. Lorsque $\mathscr{A} = \mathbb{Z}$ avec la norme $p$-adique $|.|_p$ par exemple, les entiers premiers avec $p$ sont tous de norme 1 et ne sont donc pas séparés par cette norme.

# 2 L'exemple de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$

## 2.1 Description des éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$

**Théorème 2**

Les éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ sont exactement les éléments suivants :

1. Les valeurs absolues sur $\mathbb{Z}$, qui sont les normes de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ :
   (a) La valeur absolue triviale $|.|_0$.
   (b) Les valeurs absolues $p$-adiques $|.|_p$ pour $p$ premier, ainsi que toutes les valeurs absolues qui leurs sont équivalentes, à savoir celles de la forme $|.|_p^\alpha$ avec $\alpha \in ]0, \infty[$, qui seront notées $|.|_{p,\alpha}$.
   (c) Les valeurs absolues archimédiennes, qui correspondent aux valeurs absolues de la forme $|.|_\infty^\alpha$ avec $\alpha \in ]0, 1]$ qui seront notées $|.|_{\infty,\alpha}$. Ce sont les valeurs absolues équivalentes à la valeur absolue usuelle.
2. Les semi-normes restantes, c'est à dire celles qui ne sont pas des normes, sont exactement les semi-normes induites par la norme triviale de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On notera ces éléments $|.|_{p,0}$ en référence aux notations précédentes.

*Preuve.* Commençons tout d'abord par vérifier le premier point. On rappelle que deux valeurs absolues $|.|$ et $|.|'$ sur $\mathbb{Q}$ sont topologiquement équivalentes si et seulement si il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $|.|' = |.|^\alpha$.

1. D'après le théorème d'Ostrowski, les valeurs absolues sur $\mathbb{Z}$ sont exactement :

   (a) Ou bien la valeur absolue triviale,

   (b) Ou bien équivalentes à une valeur absolue $p$-adique $|.|_p$, c'est-à-dire de la forme annoncée dans le théorème,

   (c) Ou bien équivalentes à $|.|_\infty$.

   Il reste donc à trouver lesquelles, parmi ces valeurs absolues, sont bornées sur $(\mathbb{Z}, |.|_\infty)$.

   (a) $|.|_0$ est bien bornée, car $|0|_0 = 0 = |0|_\infty$ et $\forall n \neq 0$, $|n|_0 = 1 \leqslant |n|_\infty$.

   (b) Soit $p$ un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que l'élément $|.|_{p,\alpha}$ est borné.

   Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n = 0$, on a simplement $|n|_{p,\alpha} = 0$.

   Sinon, on considère $a$ la valuation $p$-adique de n et on note $n = p^a m$ avec $m \in \mathbb{Z}$ tel que $p$ ne divise pas $m$.

   On a $|n|_{p,\alpha} = p^{-a\alpha} \leqslant 1 \leqslant |n|_\infty$.

   Ainsi, $|.|_{p,\alpha}$ est bien borné.

   (c) Soit $\alpha \in ]0, 1]$.

   Puisque la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est majorée par l'identité sur $[1, +\infty[$, on en déduit que, pour tout $n \neq 0$, $|n|_{\infty,\alpha} \leqslant |n|_\infty$. Puisque l'on a égalité pour 0 on en déduit que $|.|_{\infty,\alpha}$ est bornée.

   En revanche, si $\alpha > 1$, on peut montrer que $|.|_{\infty,\alpha}$ n'est pas bornée [2].

   Supposons par l'absurde qu'elle soit bornée.

   Il existe alors $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|n|_{\infty,\alpha} \leqslant C|n|_\infty$. Pour $n > 0$ on a donc $n^{\alpha-1} \leqslant C$.

   Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans cette inégalité large, on obtient (puisque $\alpha - 1 > 0$) que $C \geqslant +\infty$, ce qui est absurde.

   Ainsi, le théorème d'Ostrowski permet de traiter relativement aisément le cas des valeurs absolues.

2. Tout d'abord, les semi-normes induites par les valeurs triviales sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont décrites, pour un $p$ premier donné et en notant $\pi$ la projection canonique sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, par :

2. Pour $\alpha > 1$ les semi-normes $|.|_{\infty,\alpha}$ sont définies de la même manière que pour le cas $\alpha \leqslant 1$, mais ce ne sont alors plus des normes. Cependant, cela importe peu car il s'agit simplement de montrer le caractère "non borné" ici.

$$|\pi(n)|_{p,0,res} = \begin{cases} 0 \text{ si } p|n \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

On vérifie alors aisément que l'application associée $|n|_{p,0} := |\pi(n)|_{p,0,res}$ définit bien une semi-norme multiplicative sur $\mathbb{Z}$ :

- $|0|_{p,0} = |\pi(0)|_{p,0,res} = 0$,
- $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $|n - m|_{p,0} = |\pi(n) - \pi(m)|_{p,0,res} \leqslant |\pi(n)|_{p,0,res} + |\pi(m)|_{p,0,res} = |n|_{p,0} + |m|_{p,0}$,
- $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $|nm|_{p,0} = |\pi(n)\pi(m)|_{p,0,res} = |\pi(n)|_{p,0,res}|\pi(m)|_{p,0,res} = |n|_{p,0}|m|_{p,0}$.

On remarque de plus que tous les multiples de $p$ sont envoyés sur 0, on a donc bien affaire à une semi-norme ne vérifiant pas l'axiome de séparation.
De plus :

Si $\pi(n) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors par le théorème de Lagrange, il existe un entier $k$ tel que $\pi(n)^k = 1$, d'où $(|\pi(n)|_{p,0,res})^k = 1$. On en déduit alors que $|\pi(n)| \leqslant |n|_\infty$, car $\forall n \neq 0$, $|n|_\infty \geqslant 1$.

Dans le cas où $\pi(n)$ vaut 0, on a simplement $|\pi(n)|_{p,0,res} = 0 \leqslant |n|_\infty$.

Ainsi, ceci étant vrai pour tout $p$ premier, on en déduit que ces semi-normes $|.|_{p,0}$ sont bien bornées.
Réciproquement, considérons $|.|$ une semi-norme multiplicative et bornée sur $\mathbb{Z}$ ne vérifiant pas l'axiome de séparation. Montrons qu'elle est de la forme précédente.

Puisque $|.|$ ne vérifie pas l'axiome de séparation, il existe $n \neq 0$ tel que $|n| = 0$.

On considère alors $p := min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,;\, |n| = 0\}$.

Soient $a, b \in \mathbb{N}\,;\, p = ab$. On remarque que, puisque $p \neq 0$, $a$ et $b$ sont nécessairement non nuls.

On a, par multiplicativité de $|.|$, $|ab| = |a||b| = 0$. On en déduit donc que $|a| = 0$ ou $|b| = 0$. Ainsi, par minimalité de $p$ pour les éléments (non nuls) de semi-norme $|.|$ nulle, on en déduit que un des deux éléments est égal à $p$, et l'autre est égal à 1.

On vient ainsi de montrer que $p$ est premier. De plus, il est clair que tout multiple de $p$ est envoyé sur 0 : cela provient de la multiplicité de la norme $|.|$ ici considérée.

Par ailleurs, si $n \in Z \setminus p\mathbb{Z}$, on a comme pour le cas précédent d'après le théorème de Lagrange appliqué à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'existence d'un entier $k$ tel que $(|\pi(n)|_{res})^k = 1$, et donc $|\pi(n)|_{res} = 1$.

Or, si l'on effectue la division euclidienne de $n$ par $p$, en notant $n = ap + b$ avec $b \in [\![0, p-1]\!]$, on obtient $|\pi(n)|_{res} = |\pi(b)|_{res} = |b|$.

En effet, tous les réprésentants d'un même élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont envoyés sur la même valeur par

$|.|$ : D'une part, $|n| = |ap + b| \leqslant 0 + |b|$, et d'autre part, $|b| = |n - ap| \leqslant 0 + |n|$ d'où $|n| = |b|$.

Par définition de $|.|_{res}$, on en déduit donc que $|n| = |b| = |\pi(b)|_{res} = |\pi(n)|_{res} = 1$.

Finalement, $|.|$ est, comme annoncé, de la forme $|.|_{p,0}$ avec les notations précédentes.

On obtient alors le résultat énoncé dans le théorème. □

**Remarque**

On remarque que les notations sont légitimes au sens où, lorsque l'indice alpha tend vers 0 d'un côté ou vers $+\infty$ de l'autre, on retrouve les notation des cas limites, à une exception près. Plus précisément :

- Pour les normes non-archimédiennes, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et en reprenant la notation $n = p^a m$ précédemment utilisée :
  Si n est non nul, $|n|_{p,\alpha} = \left(\frac{1}{p^a}\right)^\alpha \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 1$. Sinon, $|n|_{p,\alpha} = 0$. On retrouve alors $|.|_0$.

  $$\left(\frac{1}{p^a}\right)^\alpha \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} \begin{cases} 1 \text{ si } a \text{ vaut } 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

  On retrouve alors dans ce deuxième cas la semi-norme $|.|_{p,0}$ induite par $|.|_0$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L'indice 0 ne correspond ici pas à $\alpha$, mais cela se comprend au sens où il paraît avisé de ne pas mettre d'indice $\infty$ pour une norme non-archimédienne. L'indice $\infty$ est en effet réservé pour les normes archimédiennes.

- Pour les normes archimédiennes on a simplement :
  $|n|_{\infty,\alpha} = |n|_\infty^\alpha \xrightarrow[\alpha \to 0]{} |n|_0$ et $|n|_\infty^\alpha \xrightarrow[\alpha \to 1]{} |n|_\infty$.

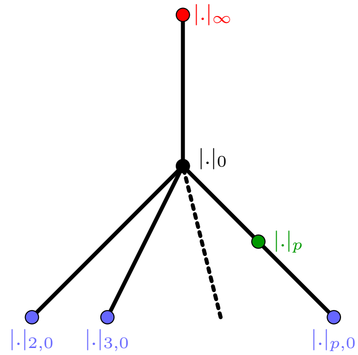


FIGURE 1 – Représentation de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$

On peut alors se représenter $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ comme ci-dessus et désigner ses sous-ensembles avec une terminologie adaptée. On désignera notamment par "branche archimédienne" l'ensemble des normes équivalentes à la valeur absolue usuelle $|.|_\infty$ (ce qui inclut $|.|_\infty$ mais pas $|.|_0$), et par "branche $p$-adique" l'ensemble des normes équivalentes à la valeur absolue $p$-adique $|.|_p$ (ce qui exclut donc les deux extrémités).

**Remarque**

Dans $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$, on a 4 types de corps résiduels complétés, selon la semi-norme considérée :

- Pour la norme triviale $|.|_0$, on obtient $\mathscr{H}(|.|_0) = \mathbb{Q}$ car le complété de $\mathbb{Q}$ par la norme triviale est $\mathbb{Q}$ lui-même. En effet, les suites de Cauchy pour cette norme sont les suites stationnaires, donc elles convergent.
- Pour la norme archimédienne et ses équivalents, on retrouve une des constructions possibles du corps des réels. On a donc $\mathscr{H}(|.|_{\infty,\alpha}) = \mathbb{R}$ pour tout $\alpha \in ]0,1]$.
- Pour les normes $p$-adiques, on trouve $\mathscr{H}(|.|_{p,\alpha}) = \mathbb{Q}_p$.
- Pour les semi-normes $|.|_{p,0}$, $\mathscr{H}(|.|_{p,0}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En effet, les suites de Cauchy pour cette semi-norme, qui ne prend que des valeurs entières (à savoir 0 ou 1), sont les suites stationnaires :
  Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors à partir d'un certain rang $n_0$, $|x_n - x_p|_{p,0} = 0$, i.e $x_n - x_p = 0_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$, ce qui signifie précisément que la suite stationne à partir de ce rang.

## 2.2 Retour sur la topologie de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$

On se propose maintenant de s'intéresser de plus près à la topologie de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$. Berkovich fait le choix de décrire la topologie sur $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ avec laquelle il travaille comme étant la topologie la moins fine rendant les $x \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}) \mapsto |n|_x \in \mathbb{R}_+$, pour $n \in \mathbb{Z}$, continues. Une autre manière de voir cette topologie est de se souvenir que la topologie produit d'un espace produit se trouve aussi être la topologie la moins fine rendant les projections, sur chaque espace constituant le produit, continues.

Ici, puisqu'apparaît la notion de semi-norme *bornée* par la norme archimédienne usuelle $|.|_\infty$, il paraît raisonnable de considérer le produit $\prod_{n\in\mathbb{Z}}[0, |n|_\infty]$. En fait, on retrouve le produit utilisé lors de la partie précédente, lorsque nous avons décrit le spectre d'un anneau de Banach commutatif $\mathscr{A}$ quelconque. $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ est donc bien homéomorphe à un fermé de ce produit.

Dans ce cas précis, les projections sont les $|.| \mapsto |n|$, avec $n$ décrivant $\mathbb{Z}$. On peut vérifier que, pour $n$ fixé, la topologie la moins fine rendant $|.| \mapsto |n|$ continue sur le segment $[0, |n|_\infty]$, est la topologie usuelle pour les segments de $\mathbb{R}$, c'est à dire celle induite par $(\mathbb{R}, |.|_\infty)$. Une base d'ouverts de ce produit, qui est celle que nous utiliserons dans la suite pour décrire d'une manière plus schématique la topologie dont nous avons muni $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$, est :

$$\{x \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})\,;\, a < |n|_x < b,\ a, b \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

On a en fait quatre type d'ouverts différents dans $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$, chacun correspondant à l'un des quatre types de semi-normes le constituant. On se contentera dans la suite de décrire les ouverts **connexes**, qui sont en fait homéomorphes à des intervalles réels.

### 2.2.1 Voisinages des normes archimédiennes $|.|_{\infty,\alpha}$ non triviales

On prend ici pour exemple l'ouvert $U := \{x \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})\,;\, 2 < |5|_x < 4\}$. Ici, la borne inférieure est $2 > 1$, donc $U$ ne contient ni $|.|_0$ ni aucune norme ou semi-norme des branches $p$-adiques (toutes majorées par 1)

Ici, $|.|_{\infty,\alpha} \in U \Leftrightarrow 2 < 5^\alpha < 4 \Leftrightarrow \alpha \in ]\log_5(2), \log_5(4)[$.

On peut donc voir $U$ comme étant homéomorphe à l'intervalle ouvert $]\log_5(2), \log_5(4)[$ :

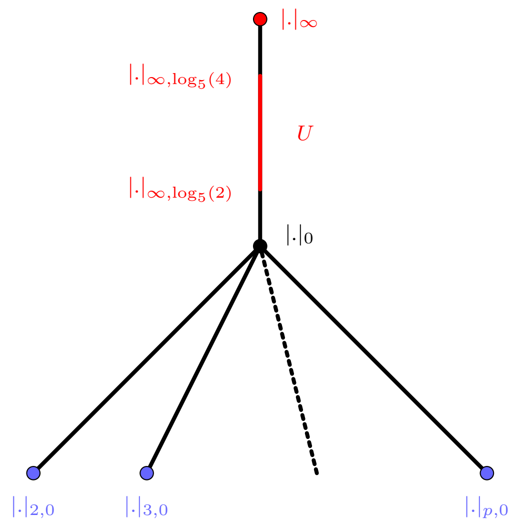


FIGURE 2 – Représentation d'un ouvert de la branche archimédienne

#### 2.2.2 Voisinages des normes p-adiques $|.|_{p,\alpha}$ non triviales

On considère ici l'ouvert $U := \{x \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})\,;\, \frac{1}{2} < |2|_x < \frac{3}{4}\}$ : la borne supérieure est plus petite (strictement) que 1, donc $U$ ne contient ni $|.|_0$ ni aucune des normes archimédiennes (car ces normes, évaluées en 2, sont minorées par 1).

Ici, $|.|_{p,\alpha} \in U \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{1}{p^\alpha} < \frac{1}{2} \\ p = 2 \end{cases}$ . En effet, si $p \neq 2$, on a $|2|_{p,\alpha} = \frac{1}{p^{\alpha\nu_p(2)}} = 1 > \frac{3}{4}$ car alors $\nu_p(2) = 0$, où $\nu_p$ désigne la valuation $p$-adique sur $\mathbb{Z}$.

On a donc $|.|_{p,\alpha} \in U \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(\frac{4}{3}) > \alpha > \log_2(2) = 1 \\ p = 2 \end{cases}$ .

On peut donc voir $U$ comme étant homéomorphe à l'intervalle ouvert $]\log_2(\frac{4}{3}), 1[$ :

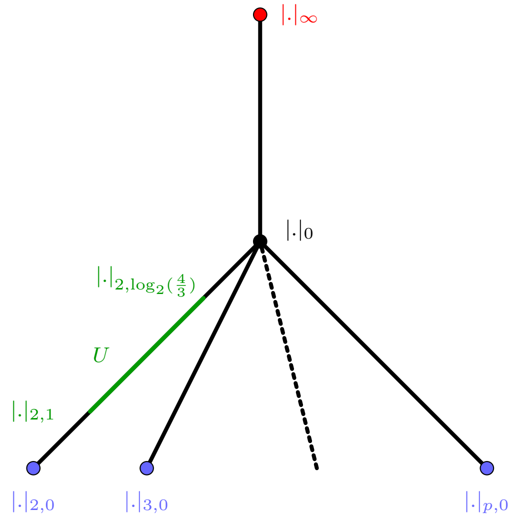


FIGURE 3 – Représentation d'un ouvert de la branche 2-adique

### 2.2.3 Voisinages de $|.|_0$

On va ici poser $U := \{x \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})\,;\, \frac{1}{2} < |2|_x < \frac{3}{2}\}$.
Ici, puisque la borne inférieure est plus petite que 1 et la borne supérieure plus grande que 1, on peut intuiter avant de faire le calcul que $U$ débordera sur la branche archimédienne et aussi sur les branches $p$-adiques.
Tout d'abord, on vérifie bien que $|.|_0$ est dans $U$ : on a bien $|2|_0 = 1 \in ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.
Ensuite, $|.|_{\infty,\alpha} \in U \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2^\alpha < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \in ]\log_2(\frac{1}{2}), \log_2(\frac{3}{2})[$.

Troisièmement, $|.|_{p,\alpha} \in U \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2^{\alpha\nu_p(2)}} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 2 \\ \text{OU} \\ p = 2 \text{ et } 1 > \alpha > \log_2(\frac{2}{3}) \end{cases}$.

Enfin, $|.|_{p,0} \in U \Leftrightarrow |2|_{p,0} = 1 \Leftrightarrow p \neq 2$.

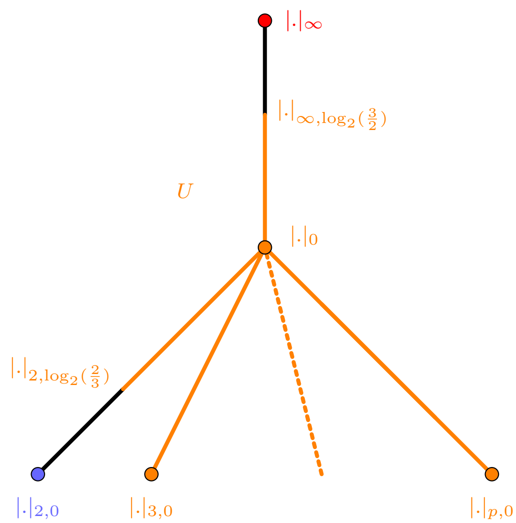


FIGURE 4 – Représentation d'un voisinage de $|.|_0$

De manière plus générale, si l'on prend au lieu de 2 un nombre composé $\prod_{i=1}^{m} p_i^{a_i}$, les branches $p_1, \ldots, p_n$ seront "coupées", et les autres comprises entièrement dans l'ouvert. Autrement dit, on peut montrer qu'**un ouvert de $|.|_0$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ contient tous les segments $p$-adiques, sauf un nombre fini d'entre**

**eux**. Ainsi, contrairement à ce qu'on aurait éventuellement pu imaginer, il n'est pas possible d'avoir un voisinage de $|.|_0$ sous la forme d'une "boule" (au sens usuel dans $\mathbb{R}^2$).

### 2.2.4 Voisinages des semi-normes $|.|_p, 0$

On prend ici l'ouvert $U := \{x \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})\,;\, -1 < |3|_x < \frac{1}{3}\}$ : la borne supérieure est plus petite (strictement) que 1, $U$ ne contient donc ni $|.|_0$ ni aucune des normes archimédiennes (car ces normes, évaluées en 2, sont minorées par 1).

De plus, comme précédemment, $|.|_{p,\alpha} \in U \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 3 \\ \text{OU} \\ p = 3 \text{ et } \alpha > 1 \end{cases}$.

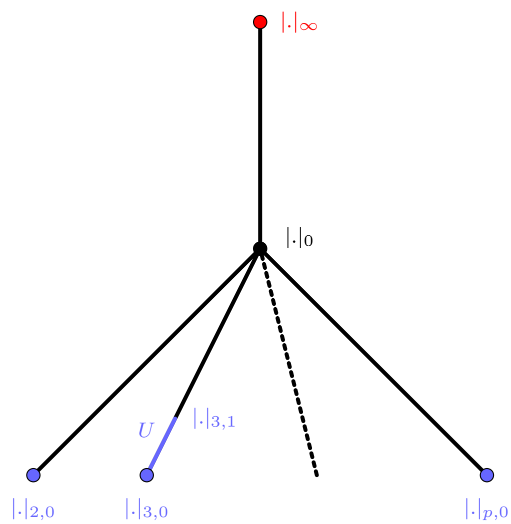


Figure 5 – Représentation d'un voisinage de $|.|_{3,0}$

# 3 Espaces de Berkovich

## 3.1 Définition et premiers exemples

**Définition 8**

Soit $(\mathscr{A}, |.|)$ un anneau de Banach commutatif et $n \in \mathbb{N}$. On appelle **espace de Berkovich de dimension n** associé à $(\mathscr{A}, |.|)$, et on note $\mathbb{A}^{n,an}_{\mathscr{A}}$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathscr{A}[T_1, \ldots, T_n]$ dont la restriction à $\mathscr{A}$ est bornée.

**Exemple.** *Pour $n = 0$, on retrouve $\mathcal{M}(\mathscr{A})$.*

On pourra désigner ce dernier espace par "l'espace de Berkovich de dimension 0", même si ici la dimension n'est qu'une terminologie interne à la définition précédente. Par la suite, nous étudierons surtout les espaces de dimension 1, c'est à dire les droites de Berkovich.

En ce qui concerne la topologie de $\mathbb{A}^{n,an}_{\mathscr{A}}$, on munit là encore cet ensemble de la topologie $\tau$ la moins fine rendant, pour tout $P \in \mathscr{A}[T_1, ..., T_n]$, l'application $|.| \in \mathbb{A}^{n,an}_{\mathscr{A}} \mapsto |P| \in \mathbb{R}_+$ continue, et on peut décrire cette topologie avec une base d'ouverts explicite :
Posons, pour $P \in \mathscr{A}[T_1, ..., T_n]$ et $r < s$ deux réels, $C_P$ le cylindre $\pi_P^{-1}(]r, s[)$ où l'on désigne ici par $\pi_P$ la projection $\pi_P : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n,an}_{\mathscr{A}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |P(x)| = |P|_x \end{array} \right.$.
On pose alors $\mathcal{B} := \{C_P \,;\, P \in \mathscr{A}[T_1, ..., T_n]\}$ la base d'ouverts engendrant, par définition, la topologie produit sur $\prod_{P \in \mathscr{A}[T_1,...,T_n]} C_P$.
La topologie produit étant la topologie la moins fine rendant les projections continues, on retombe finalement sur la définition même de la topologie $\tau$ choisie initialement.
On sera amené à travailler par la suite avec la description explicite de $\tau$ par la base décrite ci-dessus.

Considérons maintenant la projection canonique $\pi : \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathscr{A})$, définie de la manière suivante : Si $x \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{A}}$, et $|.|_x$ est la semi-norme associée, alors $|.|_x$ induit naturellement une semi-norme multiplicative bornée sur $\mathscr{A}$, à savoir $(|.|_x)_{|\mathscr{A}}$ pour peu que l'on identifie $\mathscr{A}$ avec l'ensemble des polynômes constants de $\mathscr{A}[T]$. C'est cette norme que nous désignons par $\pi(x)$.

**Proposition 2**

En reprenant les notations précédentes pour $(\mathscr{A}, |.|)$ et $\pi$, on a :

$$\forall x \in \mathcal{M}(\mathscr{A}),\ \pi^{-1}(\{x\}) \simeq \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}.$$ [3]

Où, là encore, $\simeq$ désigne une relation d'homéomorphie.

*Preuve.* On va tout d'abord montrer qu'on peut définir de manière naturelle une application bijective entre un élément de $\pi^{-1}(\{x\})$ et de $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}$. Soit alors $x \in \mathcal{M}(\mathscr{A})$. On note $|.|_x$ la semi-norme associée. Soit $y \in \pi^{-1}(\{x\})$. On note $|.|_y$ la semi-norme associée.

Montrons que $|.|_y$ induit un élément de $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}$. Pour cela, de la même manière que pour définir le corps résiduel complété $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}$, on va procéder en trois étapes.

Tout d'abord, on pose $\mathscr{P}_x$ l'idéal $\{f \in \mathscr{A} \,;\, |f|_x = 0\}$, comme précédemment. On rappelle que c'est un idéal premier fermé de $\mathscr{A}$. Il s'agit alors de définir une application $(\mathscr{A}/\mathscr{P}_x)[T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de manière à obtenir une application qui induise $|.|_y$ sur $\mathscr{A}$.

On considère alors $P \mapsto \overline{P} \mapsto |P|_y$, où, si $P = \sum_{k=0}^{m} a_k T^k$, $\overline{P}$ désigne le polynôme $\sum_{k=0}^{m} \overline{a_k} T^k$ à coefficients dans le quotient $\mathscr{A}/\mathscr{P}_x$. Montrons que cette application reste constante lorsque $P$ appartient à une même classe d'équivalence pour le quotient ici considéré.

Soient $P, Q \in \mathscr{A}[T]$ tels que $\overline{P} = \overline{Q}$. On note $P = \sum_{k=0}^{m} a_k T^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k T^k$.

En reformulant l'égalité $\overline{P} = \overline{Q}$, il vient : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\overline{a_k} = \overline{b_k}$ et donc $|a_k - b_k|_y = |a_k - b_k|_x = 0$.

Ainsi, $|P - Q|_y = \left|\sum_{k=0}^{m} (a_k - b_k) T^k\right|_y \leqslant \sum_{k=0}^{m} |(a_k - b_k) T^k|_y = \sum_{k=0}^{m} |a_k - b_k|_y |T^k|_y = 0.$

On a donc $|P|_y \leqslant |P - Q|_y + |Q|_y = |Q|_y$, et vice-versa, d'où $|P|_y = |Q|_y$.

On peut alors définir sans ambiguïté l'application $\overline{P} \mapsto |P|_y$ qui "étend" $|.|_y$ à $(\mathscr{A}/\mathscr{P}_x)[T]$. Ensuite, il s'agit de passer au corps des fractions. Pour cela, on définit l'application selon le principe suivant :

On note $\widetilde{P} = \sum_{k=0}^{m} \widetilde{a_k} T^k$ les éléments de $(Frac(\mathscr{A}/\mathscr{P}_x))[T]$ où $\widetilde{a_k}$ est de la forme $\frac{\overline{p_k}}{\overline{q_k}}$ avec $q_k \notin \mathscr{P}_x$. L'idée est alors de prendre, pour un $P \in \mathscr{A}[T]$ quelconque, un dénominateur $\overline{q}$ commun à tous les $\widetilde{a_k}$ et de définir $|\widetilde{P}|_y$ par $\frac{|\overline{qP}|_y}{|q|_x}$. Ici, $|\overline{qP}|_y$ est bien défini par l'application précédente. Pour fixer les choses, on prendra systématiquement $q = \prod_{k=0}^{m} q_k$, qui vérifie $q \notin \mathscr{P}_x$ car cet idéal est premier, et pour tout $k$, $q_k \notin \mathscr{P}_x$.

3. On peut rencontrer le terme de "fibre au dessus de $|.|_x$" pour désigner $\pi^{-1}(\{x\})$

Soient $P, Q \in \mathscr{A}[T]$ tels que $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$. On note $P = \sum_{k=0}^{m} \widetilde{a_k} T^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} \widetilde{b_k} T^k$. On note $\widetilde{a_k} = \frac{\overline{p_k}}{\overline{q_k}}$ et $\widetilde{b_k} = \frac{\overline{r_k}}{\overline{s_k}}$

En notant respectivement $q$ et $s$ le produit des $q_k$ (resp. des $s_k$), on a exactement de la même manière que précédemment $|P - Q|_y = 0$, ce dont on déduit $|P|_y = |Q|_y$.

Enfin, pour passer au complété, on procède de la même manière pour définir l'application ayant pour argument un polynôme ayant pour coefficients des suite de Cauchy d'éléments de $(Frac(\mathscr{A}/\mathscr{P}_x))$.

L'idée est de travailler coefficient par coefficient (coefficients qui sont ici des suites) et de vérifier que l'application ci-dessus est bien définie, c'est à dire ne dépend pas de la suite de Cauchy choisie pour représenter un élément de $(Frac(\mathscr{A}/\mathscr{P}_x))$. La démonstration est fastidieuse, et n'emprunte pas d'idée novatrice, c'est pourquoi l'on admettra que cette application est bien définie.

A ce stade, on a donc défini à partir de $|.|_y$ et de manière relativement naturelle (dans le sens où nous retrouvons une construction similaire à celle du corps résiduel complété) une application partant de l'ensemble des polnyômes à coefficients dans le complété de $(Frac(\mathscr{A}/\mathscr{P}_x))$ et arrivant dans $\mathbb{R}_+$. On a ainsi en quelque sorte "étendu" la semi-norme $|.|_y$ à un élément de $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}$.

Notons $\theta : |.|_y \in \pi^{-1}(\{x\}) \mapsto |.|_y \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}$ l'application ainsi construite.

Réciproquement, si l'on prend un $y \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}$, on définit l'élément $y \in \pi^{-1}(\{x\})$ associé comme suit :

Pour tout $f \in \mathscr{A}$, on peut voir $f$ comme la suite de Cauchy constante égale à $\frac{\overline{f}}{\overline{1}}$, et considérer $\left|\frac{\overline{f}}{\overline{1}}\right|_y$.

En appliquant ceci à tous les $f \in \mathscr{A}$, cela définit bien, de manière unique, un élément de $\pi^{-1}(\{x\})$.

On vérifie alors que les deux applications définies sont réciproques l'une de l'autre :

Si $y \in \pi^{-1}(\{x\})$, l'image de $y$ par $\theta$ fournit un élément (et un seul possible) $|.|_y \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}$. On vérifie alors que l'image de $|.|_y$ par la seconde application coïncide bien avec l'élément $y$ considéré au départ.

On s'intéresse maintenant aux topologies mises en jeu. D'une part, la topologie de $\pi^{-1}(\{x\})$ est celle induite par $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{A}}$, donc d'après la description explicite précédemment exhibée, cette topologie a pour base d'ouverts $\{|.|_x \in \pi^{-1}(\{x\})\,;\, r < |P|_x < s\}_{r,s \in \mathbb{R}, P \in \mathscr{A}[T]}$. D'autre part, la topologie sur $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}$ est celle ayant pour base d'ouverts $\{|.|_x \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}\,;\, r < |P|_x < s\}_{r,s \in \mathbb{R}, P \in \mathscr{H}(x)[T]}$. Par définition de $\theta$, on comprend bien que l'image réciproque par $\theta$ d'un ouvert de la forme $\{|.|_x \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{A}}\,;\, r < |P|_x < s\}$ ne sera autre que $\{|.|_x \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}\,;\, r < |Q|_x < s\}$ avec $Q \in \mathscr{H}(x)[T]$ l'image de $P \in \mathscr{A}[T]$ dans le corps résiduel complété.

Finalement, l'application $\theta : \pi^{-1}(\{x\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^{1,an}_{\mathscr{H}(x)}$ construite est bien un homéomorphisme.

$\square$

## 3.2 Description de la droite de Berkovich pour les corps archimédiens

**Proposition 3 (Description de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$ dans le cas archimédien)**

Pour tout $\alpha \in ]0,1]$, on a :

1. Dans $(\mathbb{C}, |.|_\infty^\alpha)$, $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an} \simeq \mathbb{C}$.
2. Dans $(\mathbb{R}, |.|_\infty^\alpha)$, $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^{1,an} \simeq \{z \in \mathbb{C}\,;\, Im(z) \geqslant 0\}$.

Où $\simeq$ désigne une relation d'homéomorphie.

Pour montrer ceci, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2 (Gelfand-Mazur)**

Toute algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ qui est un corps est isomorphe à $\mathbb{C}$.

*Preuve.* On peut trouver une preuve de ce lemme dans [Maz07]. □

*Preuve.* (de la proposition)

On se place d'abord dans le cas où $\alpha = 1$.

<u>Cas 1 : $\mathbb{C}$</u>

Considérons l'application suivante :

$$j : \left( \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, |.|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}, \tau) \\ z & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[T] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ P & \longmapsto & |P(z)|_\infty \end{array} \right. \end{array} \right).$$

Tout d'abord, $j$ est bien définie. En effet, pour $z \in \mathbb{C}$ :

- $j(z)$ est une semi-norme sur $\mathbb{C}[T]$ car positive, nulle en $P = 0_{\mathbb{C}[T]}$, et vérifie l'inégalité triangulaire car $|.|_\infty$ la vérifie.
- Par multiplicitavité de $|.|_\infty$, $j(z)$ est aussi multiplicative.
- $j(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$ car égale à $|.|_\infty$ sur $\mathbb{C}$.

Montrons alors que $j$ est un homéomorphisme.

Injectivité :

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}$ tels que $j(z) = j(z')$.

On a alors, en prenant $P = X - z'$ : $|P(z)|_\infty = |P(z')|_\infty$, c'est à dire $|z - z'|_\infty = 0$, d'où $z = z'$.

Surjectivité :

Soit $x \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$. Notons $|.|_x$ la semi-norme associée.

De la même manière que lors de la construction du corps résiduel complété $\mathscr{H}(x)$, on construit un morphisme $\chi_x : \mathbb{C}[T] \longrightarrow \mathscr{H}(x)$. Ici, $\mathscr{H}(x)$ désigne donc le complété du corps valué $(Frac(\mathbb{C}[T]/\mathscr{P}_x), |.|_x)$ avec $\mathscr{P}_x = \{P \in \mathbb{C}[T]\,;\, |P|_x = 0\}$.

On en déduit une application $\mathbb{C} \to \mathscr{H}(x)$ en composant l'injection canonique $\iota : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}[T]$ par $\chi_x$.

Montrons alors que cette application, que l'on notera $\varphi$, est un isomorphisme.

Le caractère isométrique provient directement du fait que $|.|_x$ soit bornée sur $(\mathbb{C}, |.|_\infty)$. En effet :

Puisque $|.|_x$ est bornée et multiplicative, on peut prendre la constante $C$ égale à 1 : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|.|_x \leqslant |.|_\infty$.

On en déduit :

Si $z = 0$, alors $|z|_x = 0 = |z|_\infty$.

Sinon, alors on applique l'inégalité précédente à $1/z$, et on obtient $|\frac{1}{z}|_x = \frac{1}{|z|_x} \leqslant \frac{1}{|z|_\infty}$, d'où $|z|_x = |z|_\infty$.

Ainsi, on a bien $|.|_x = |.|_\infty$.

Ensuite, puisque $\mathscr{H}(x)$ est par construction un corps valué complet, c'est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ et donc, d'après le lemme précédent, $\mathscr{H}(x)$ est homéomorphe à $\mathbb{C}$. On a d'ailleurs un homéomorphisme, à savoir $\varphi : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(x)$.

On peut alors considérer $\beta := \chi_x(T) \in \mathscr{H}(x)$. Notons $z$ son image par $\varphi^{-1}$ ; on a $z \in \mathbb{C}$. Montrons que $z$ est le bon candidat pour vérifier $j(z) = x$, c'est à dire : $\forall P \in \mathbb{C}[T]$, $|P(z)|_\infty = |\chi_x(P)|_x$.

Soit $P \in \mathbb{C}[T]$. On note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k T^k$.

On a, puisque $\chi_x$ est un morphisme d'anneaux : $\chi_x(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k(\chi_x(T))^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \beta^k$.

D'où, puisque $\varphi$ est une isométrie ainsi qu'un morphisme d'anneaux, $|\chi_x(P)|_x = |\varphi^{-1}(P(\beta))|_x = |P(z)|_\infty$.

Ainsi, on a bien $j(z) = x$.

Continuité : On va travailler avec les bases d'ouverts dont on dispose.

Soit $D(a, r)$ un disque ouvert de $\mathbb{C}$. Montrons que son image par $j$ est ouverte dans $(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n,an}, \tau)$.

Montrons que $j(D(a, r)) = \{|.|_z \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n,an}\,;\, |T - a|_z < r\}$.

D'une part, si $x \in j(D(a,r)$, puisque $j$ est bijective, il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que $|.|_x = |.|_z$. De plus, cet élément vérifie $z \in D(a,r)$ et on a donc $|T-a|_z = |z-a|_\infty < r$, ce par définition de $|.|_z$.

D'autre part, si $|.|_z$ vérifie $|T-a|_z < r$, alors en appliquant la définition de $|P|_z$, on trouve $|z-a|_\infty < r$ et donc $z \in D(a,r)$.

On reconnaît là un élément de la base d'ouverts (donc un ouvert) de $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathbb{C}}$.

Réciproquement : soient $r, s \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{C}[T]$ et $U := \{|.|_z \in \mathbb{A}^{n,an}_{\mathbb{C}} \,;\, r < |P|_z < s\}$ l'élément correspondant de la base d'ouverts de $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathbb{C}}$.

On a $j^{-1}(U) = \{z \in \mathbb{C} \,;\, r < |P(z)| < s\}$.

Or on peut voir la topologie usuelle sur $\mathbb{C}$ comme celle engendrée par la base d'ouverts $\{x \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathbb{C}} \,;\, |T-a|_x < r,\ a \in \mathbb{C},\ r > 0\}$.

En particulier, si l'on prend une base d'ouverts plus grande, comme $\{x \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathbb{C}} \,;\, |P|_x < r,\ P \in \mathbb{C}[T],\ r > 0\}$, on a $j^{-1}(U) = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |P(z)| < s\} \cap (\{z \in \mathbb{C} \,;\, |P(z)| \leqslant r\})^c$ qui est clairement un ouvert de cette topologie, et donc de la topologie moins fine qu'est la topologie usuelle sur $\mathbb{C}$.

Ainsi, on a bien montré que $j$ est continue.

On a donc montré que $j$ est un homéomorphisme. Son caractère isométrique est aisé à vérifier : il provient du fait que

Cas 2 : $\mathbb{R}$

Comme précédemment, on considère l'application suivante, cette fois-ci définie relativement à $\mathbb{R}$ :

$$j : \left( \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, |.|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{A}^{1,an}_{\mathbb{R}}, \tau) \\ z & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[T] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ P & \longmapsto & |P(z)|_\infty \end{array} \right. \end{array} \right).$$

Cependant, contrairement au cas précédent, cette application n'est pas injective, c'est pourquoi nous allons chercher à exhiber le défaut d'injectivité afin de quotienter $\mathbb{C}$ par la bonne relation d'équivalence, avant de poursuivre de la même manière que précédemment.

Défaut d'injectivité :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $j(z) = j(z')$.

On pose $P = (X-z)(X-\overline{z})$, qui est bien un polynôme à coefficients réels ; on obtient en évaluant en $z'$ : $|(z'-z)(z'-\overline{z})|_\infty$ et donc $z' \in \{z, \overline{z}\}$. Réciproquement, puisque l'opération de conjuguaison est multiplicative, on a, pour tout polynôme $P$ à coefficients réels, et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = P(\overline{z})$.

Ainsi, on est amené à considérer la relation d'équivalence $\sim$ définie à l'aide de la conjuguaison, c'est à dire définie par : Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $z \sim z'$ ssi $\overline{z} = z'$.

Le fait que cette relation soit une relation d'équivalence provient notamment du fait que la conjuguaison soit idempotente.

On note alors $\mathcal{P} = \mathbb{C}/\sim$. On remarque que $\mathcal{P}$ n'est nul autre que le plan $\{z \in \mathbb{C}\,;\, Im(z) \geqslant 0\}$, au choix du signe de la partie imaginaire près.

On considère alors maintenant la restriction de $j$ à ce plan. Cette application est alors injective, car quotienter par la conjuguaison a permis, d'après ce qui précède, de corriger le défaut d'injectivité de $j$.

Pour la surjectivité, on procède de la même manière que pour le permier cas :

On construit un morphisme $\chi_x : \mathbb{R}[T] \to \mathscr{H}(x)$ dont on déduit un autre morphisme $\mathbb{R} \to \mathscr{H}(x)$ qui va s'avérer être un homéomorphisme.

Le caractère isométrique se vérifie de la même manière que pour le cas 1.

Pour le caractère bijectif, il s'avère que le théorème de Gelfand-Mazur possède en réalité une version un peu plus générale, que nous admettons ici, qui stipule que toute $\mathbb{R}$-algèbre commutative normée est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ .[4] Dans notre cas, cela entraîne que $\mathscr{H}(x)$ est soit isomorphe à $\mathbb{R}$, soit à $\mathbb{C}$, et donc la seule possibilité pour $\mathscr{H}(x)$ ici est donc d'être isomorphe à $\mathbb{R}$.

Ainsi, on conclut de la même manière que $x$ est l'image de $\varphi^{-1}(\chi_x(T)) \in \mathbb{C}$ par $j$, ce qui conclut sur la surjectivité.

On remarque par ailleurs qu'ajouter une puissance $\alpha \in \,]0,1]$ ne change rien à la démonstration, car l'on obtient les mêmes corps résiduels complétés. En effet, lors du passage au quotient, puisque $\alpha > 0$, on a pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[T]$, l'équivalence $|P|_x = 0 \Leftrightarrow |P|_x^\alpha = 0$, donc l'idéal $\mathscr{P}_x$ considéré précédemment ne change pas. Lors du passage au corps des fractions, on obtient donc le même corps. De plus, puisque $\alpha \in \,]0,1]$, on a toujours une norme bornée, qui est de plus métriquement équivalente à $|.|_\infty$, donc le passage au complété fournit bien le même corps valué complet $\mathscr{H}(x)$.

Finalement, on obtient bien le résultat annoncé.

4. On oublie ici la version "complète" du théorème, incluant le corps des quaternions

$\square$

## 3.3 Description de la droite de Berkovich pour les corps non-archimédiens

Dans toute cette sous-partie, on se donne un corps valué complet non-archimédien $(\mathbb{K}, |.|)$, c'est à dire un corps muni d'une valeur absolue qui rende $k$ complet, et qui vérifie l'inégalité ultramétrique que l'on rappelle ici :

$$\forall f, g \in \mathbb{K}, |f - g| \leqslant max(|f|, |g|).$$

On fait également l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos ; l'utilité de cette hypothèse apparaîtra plus tard.

Il s'agit ici de décrire la droite de Berkovich $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathbb{K}}$ associée au corps $\mathbb{K}$. On introduit avant cela les notations suivantes :

$$\text{On pose } |\mathbb{K}| := \{r \in \mathbb{R}^*_+ \,;\, \exists a \in \mathbb{K}, r = |a|\}.$$

On appelle également, pour $a \in \mathbb{K}$ et $r > 0$ disque fermé de centre $a$, de rayon $r$ et relatif à $x$ l'ensemble :

$$E(a, r) := \{x \in \mathbb{A}^{1,an}_{\mathbb{K}} \,;\, |(T - a)(x)| \leqslant r\}.$$

**Proposition 4 (Description de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$ dans le cas non-archimédien)**

Soit $x \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$. Alors $x$ satisfait à l'une et (une seule) des propositions suivantes :

1. Il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $|.|_x$ soit l'application $|.|_a : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[T] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ P & \longmapsto & |P(a)| \end{array} \right.$.
2. Il existe $a \in \mathbb{K}$ et $r \in |\mathbb{K}|$ non nul tel que $|.|_x$ soit l'application :
$$|.|_{a,r} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[T] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum_{k=0}^{m} a_k (T-a)^k & \longmapsto & \min_{k \in [\![0,n]\!]} (|a_n| r^k) \end{array} \right. .$$
3. Il existe $a \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{R}_+^* \setminus |\mathbb{K}|$ tel que $|.|_x$ soit de la forme précédente.
4. Il existe une famille $\mathscr{E} = (E_i)_{i \in I} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$ de disques $E_i = E(a_i, r_i)$ fermés emboîtés ($i.e$ : pour tous $i, j \in I$ tels que $r_i < r_j$, $E_i \subset E_j$) tels que $\bigcap_{i \in I} E_i \cap \mathbb{K} = \emptyset$ et que $|.|_x$ soit la norme $|.|_{\mathscr{E}}$ définie par $|P|_{\mathscr{E}} := \inf_{i \in I} |P|_{a_i, r_i}$.
   Dans cette intersection, $\mathbb{K}$ est vu comme plongé dans l'ensemble des semi-normes, via l'application $a \in \mathbb{K} \longmapsto |.|_a \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$.

*Preuve.* Il s'agit dans un premier temps de bien vérifier que ces quatre types d'applications sont bien des semi-normes multiplicatives sur $\mathbb{K}[T]$ bornées sur $\mathbb{K}[T]$.

1. Pour le premier type, la preuve est la même que dans le cas archimédien.
2. (et 3.) Soit $a \in \mathbb{K}$ et $r > 0$.

   Le fait que $|.|_{a,r}$ soit une semi-norme sur $\mathbb{K}[T]$, bornée sur $\mathbb{K}$, se vérifie relativement rapidement :

   - $|0|_{a,r} = 0$.
   - Soient $P, Q \in \mathbb{K}[T]$, on note $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (T-a)^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (T-a)^k$.
     Par inégalité triangulaire ultramétrique, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k - b_k| r^k \leqslant r^k \max(a_k, b_k)$.
     D'où $|P - Q|_{a,r} \leqslant \min(|P|_{a,r}, |Q|_{a,r})$.
   - Pour tout $f \in \mathbb{K}$, $|f|_{a,r} = |f| r^0 = |f|$ donc cette norme est bien bornée sur $\mathbb{K}$.

   Le point moins trivial est de montrer la multiplicativité.

   Soient $P, Q \in \mathbb{K}[T]$ notés comme précédemment. Si l'un des deux est nul, l'égalité est triviale : plaçons-nous dans le cas contraire. On pose $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ les coefficients du polynôme $PQ$.

Premièrement, par inégalité ultramétrique, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|c_k| \leqslant \max_{j\in[\![0,k]\!]}(|a_j b_{k-j}|r^k)$.

On en déduit donc en passant au maximum sur les coefficients que $|PQ|_{a,r} \leqslant |P|_{a,r}|Q|_{a,r}$.

Montrons maintenant que cette inégalité est une égalité :

Soient $n_0$ le plus petit entier tel que $|a_{n_0}|r^{n_0} = |P|_{a,r}$ et $m_0$ le plus petit entier tel que $|b_{m_0}|r^{m_0} = |Q|_{a,r}$. On pose $p_0 := n_0 + m_0$.

Soient $(n, m) \neq (n_0, m_0)$ tels que $n + m = p_0$. Parmi $n$ et $m$, l'un des deux est strictement plus petit que $n_0$ ou $m_0$ ; quitte à échanger les rôles, on suppose que $n < n_0$.

On a alors $|a_n|r^n < |a_{n_0}|r^{n_0}$ ainsi que $|b_m|r^m \leqslant |b_{m_0}|r^{m_0}$.

Par multiplication d'une inégalité stricte avec une inégalité non stricte, on obtient l'inégalité stricte suivante : $|a_n|r^n|b_m|r^m < |a_{n_0}|r^{n_0}|b_{m_0}|r^{m_0}$.

Ou encore : $|a_n||b_m| < |a_{n_0}||b_{m_0}|$.

Cette dernière condition est une condition suffisante d'égalité dans l'inégalité ultramétrique (car valable sur tous les couples d'entiers de somme $p_0$ différents de $(n_0, m_0)$). On en déduit donc que l'inégalité précédente est une égalité.

Ainsi, les types 2 et 3 décrits dans le théorème correspondent bien à des éléments de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$.

4. Soit $a \in \mathbb{K}$ et une famille $\mathscr{E} = (E_r)_{r\in\mathbb{R}_+^*}$ de disques centrés en $a$. Montrons que $|.|_{\mathscr{E}}$ est bien un élément de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$.

   On a bien $|0|_{\mathscr{E}} = 0$ et, pour tout $r > 0$, $P, Q \in \mathbb{K}[T]$, $|P - Q|_{\mathscr{E}} \leqslant |P - Q|_{a,r} \leqslant \min(|P|_{a,r}, |Q|_{a,r})$, donc par passage à l'infimum, on a bien l'inégalité triangulaire utramétrique souhaitée.

   Montrons la multiplicité : soient $P, Q \in \mathbb{K}[T]$. On va procéder par double inégalité.

   D'une part, on a, pour tous $r > 0$, $|PQ|_{\mathscr{E}} = \inf_{r>0} |PQ|_{a,r} \leqslant |P|_{a,r}|Q|_{a,r}$.

   En remarquant que, si $\rho > r$, $|.|_{a,\rho} > |.|_{a,r}$, on en déduit, pour $0 < r < \rho$ :
   $|PQ|_{\mathscr{E}} \leqslant |P|_{a,r}|Q|_{a,\rho} \leqslant \left(\inf_{r>0} |P|_{a,r}\right)\left(\inf_{\rho>0} |Q|_{a,\rho}\right) = |P|_{\mathscr{E}}|Q|_{\mathscr{E}}$.

   D'autre part, pour tout $r > 0$, $|P|_{\mathscr{E}}|Q|_{\mathscr{E}} = \left(\inf_{r>0} |P|_{a,r}\right)\left(\inf_{\rho>0} |Q|_{a,\rho}\right) \leqslant |P|_{a,r}|Q|_{a,r}$.

   Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, on en déduit par passage à l'infimum : $|P|_{\mathscr{E}}|Q|_{\mathscr{E}} \leqslant |PQ|_{\mathscr{E}}$.

   Ainsi, on en conclut $|P|_{\mathscr{E}}|Q|_{\mathscr{E}} = |PQ|_{\mathscr{E}}$.

**Remarque**

On remarque que, lors de la démonstration du point 4. ci-dessus, l'hypothèse que l'intersection de la famille de disques avec $\mathbb{K}$ soit vide n'est pas utilisée. En réalité, on peut retrouver grâce à la définition de

$|.|_{\mathscr{E}}$ les trois autres types de points selon les différents cas portant sur la forme de $\bigcap_{r\in\mathbb{R}_+^*} E_r \cap \mathbb{K}$.
En effet, par définition, le type 4 apparaît lorsque cette intersection est vide, et on peut montrer que le type 1 apparaît lorsque cette intersection est réduite à un point, et que les types 2 et 3 apparaissent lorsque c'est un disque non réduit à un point.
Pour la suite, il suffira ainsi de travailler avec la définition de $|.|_{\mathscr{E}}$ par l'infimum pour régler les quatre différents types de points en une seule étape.

Réciproquement, montrons que l'on a bien décrit tous les éléments de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$.
Soit $x \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$. On pose $\mathscr{E} := \{E(a, |T-a|_x)\,;\, a \in \mathbb{K}\}$.
On remarque tout d'abord que, si $a, b \in \mathbb{K}$ vérifient $|T-a|_x \leqslant |T-b|_x$, alors par définition, pour tout $y \in E(a, |T-a|_x)$, $|(T-b)(y)| = |T-b|_y = |T-b+a-a|_y \leqslant \max(|T-a|_y, |b-a|_y)$.
Or $|b-a|_y \leqslant \max(|T-b|_y, |T-a|_y)$, on a donc $|T_b|_y \leqslant \max(|T-a|_y, |T-b|_y)$.
Ainsi, on a bien $|T-b|_y \leqslant |T-a|_y \leqslant |T-a|_x \leqslant |T-b|_x$.
On en déduit donc que $y \in E(b, |T-b|_x)$. On a donc ainsi une famille de disques fermés emboîtés.
On va maintenant montrer que $|.|_{\mathscr{E}} = |.|_x$. Les applications étant ici multiplicatives, et puisque $\mathbb{K}$ est ici supposé algébriquement clos, il suffit ici de vérifier cette égalité pour tout monôme.
Soit alors $a \in \mathbb{K}$.
D'une part, on remarque que, par définition de la norme pour le type 2 (et 3) : $|T-a|_{a,|T-a|_x} = |T-a|_x$.
On en déduit donc que $|T-a|_{\mathscr{E}} = \inf_{b\in\mathbb{K}}(|T-a|_{b,|T-b|_x}) \leqslant |T-a|_x$.
D'autre part, pour tout $b \in \mathbb{K}$, on a par inégalité ultramétrique : $|T-a|_x = |T-a+b-b| \leqslant \max(|T-b|_x, |b-a|_x)$.
Comme $|T-a|_{b,|T-b|_x} = \max(|T-b|_x^1,\ |b-a|_x|T-b|_x^0)$ on en déduit, par passage à l'infimum : $|T-a|_{\mathscr{E}} \geqslant |T-a|_x$.
Ainsi, on a bien $|.|_{\mathscr{E}} = |.|_x$ sur $\mathbb{K}[T]$ tout entier.
Par la remarque faite précédemment, on en conclut que $x$ est bien un point de type 1,2,3 ou 4. □

**Remarque**

On remarque que toutes les semi-normes sur la droite de Berkovich d'un espace non-archimédien sont non-archimédiennes. Cela assure donc le fait qu'on ne puisse pas créer de norme archimédienne sur un corps non-archimédien, ce qui semble raisonnable.

# 4 Fonctions analytiques sur les espaces de Berkovich

## 4.1 Premières définitions

Dans cette partie, $(\mathbb{K}, |.|)$ désigne un anneau de Banach commutatif intègre. On notera également $\mathscr{K}_n$ l'anneau des fractions de $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

**Définition 9**

Soit $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n,an}$. On dit d'un élément $f \in \mathscr{K}_n$ qu'il est **défini** sur $U$ s'il existe $g, h \in \mathscr{K}_n$ tels que $f = g/h$ et $\forall x \in U$, $h(x) \neq 0$. On définit alors la valeur de $f$ en $x$ par $f(x) := g(x)/h(x) \in \mathscr{H}(x)$.

**Définition 10 (Fonction analytique)**

Soit $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n,an}$. Une **fonction analytique** sur $U$ est un processus qui à chaque $x \in U$ associe un élément $f(x) \in \mathscr{H}(x)$ tel que $f$ soit une limite locale de fonctions rationnelles, c'est à dire que pour tout $x \in U$, il existe $U' \subset U$ un voisinage ouvert de $x$ pour lequel :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{K}_n$ défini sur $U'$ vérifiant : $\forall x' \in U'$, $|f(x') - g(x')| \leqslant \varepsilon$.

On notera $\mathscr{O}(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $U$.

La notion de fonction est ici à prendre au sens large, c'est à dire non pas au sens d'application, mais plutôt de "processus". En particulier, on verra dans l'exemple portant sur $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ que l'ensemble d'arrivée peut dépendre du point $x$ en lequel on évalue la "fonction" $f$.

La définition fournit une notion de convergence ici (on verra par exemple qu'il s'agit d'une convergence uniforme au sens usuel dans le cas de $\mathbb{C}$). On notera, relativement à cette définition, $\|.\|_{U'}$ l'application définie sur $\mathscr{K}_n$ par :

$$\forall f \in \mathscr{K}_n,\ \|f\|_{U'} := \sup_{x' \in U'} (|f(x')|) = \sup_{x' \in U'} (|f|_{x'}).$$

On peut vérifier que cela définit bien une semi-norme sur les éléments de $\mathscr{K}_n$ pour lesquels ce sup est fini.

## 4.2 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$ et fonctions holomorphes

Au cours d'une des parties précédentes, nous avons montré que la droite de Berkovich $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$ associée à $\mathbb{C}$ était isomorphe à ce dernier. Il serait donc raisonnable, au vu de la terminologie employée, de penser que les fonctions analytiques au sens de Berkovich sont, à association par une application bijective près (*c.f* $\phi$ ci-dessous), les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$, c'est à dire les fonctions holomorphes. Il se trouve que c'est le cas. Pour le démontrer, on se permettra d'"'oublier" l'isomorphisme canonique $\phi : z \in \mathbb{C} \to |.|_z \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$ explicité précédemment. On pourra ainsi sans plus de manières passer d'un complexe $z$ à sa semi-norme $|.|_z$ associée.

**Proposition 5**

Toute fonction analytique sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$ définit de manière unique une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et réciproquement.

*Preuve.* On a ici, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathscr{H}(z) = \mathbb{C}$. On s'autorisera donc à voir les fonctions analytiques de Berkovich comme des applications au sens usuel du terme.
Dans un premier temps, fixons $f$ une fonction analytique sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$. et $|.|_z \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$ une semi-norme.
Par définition, il existe un ouvert $U'$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$ contenant $|.|_z$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{K}_1$ défini sur $U'$ vérifiant : $\forall x' \in U'$, $|f(x') - g(x')| \leqslant \varepsilon$.
Ici, $\mathscr{K}_1$ désigne les fractions rationnelles à coefficients complexes. On voit ci-dessus que $g$ est une fonction holomorphe sur $U'$ par quotient de fonctions holomorphes sur $U'$ (en l'occurence des fonctions polynomiales).
De plus, on voit qu'il s'agit ici d'une convergence uniforme sur $U'$ car $\varepsilon$ ne dépend pas de $x'$ ici.
En prenant $\varepsilon$ sous la forme $\frac{1}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$, on trouve ainsi une suite $g_n$ de fonctions holomorphes sur $U'$ qui converge uniformément vers $f$. On en déduit que $f$, vue ici comme application de $\mathbb{C}$ dans lui-même, est holomorphe sur l'ouvert $U'$.
Ceci valant pour tout $z \in \mathbb{C}$, on en déduit que $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Réciproquement : prenons une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$.
On note, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
Posons, pour $n \in_N n$ et $z \in \mathbb{C}$, $g_n(z) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. On constate que $g_n$ est polynômiale donc en particulier

$g_n \in \mathscr{K}_1$.

La série $\sum_n a_n z^n$ étant uniformément convergente sur $\mathbb{C}$ (car normalement convergente), son reste partiel converge uniformément sur $\mathbb{C}$ vers 0. Autrement dit, la fonction $g_n$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathbb{C}$, ce qui d'après la remarque faite dans le cas précédent, correspond exactement à la notion de convergence apparaissant dans la définition de fonction analytique au sens de Berkovich.

Ainsi, on en déduit que $f$ est analytique sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$. □

**Remarque**

On aurait pu démontrer, exactement de la même manière qu'une fonction analytique sur un ouvert quelconque $U$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$ correspond de manière unique à une fonction holomorphe sur $U$, si l'on se permet là encore d'identifier les deux ouvers via l'isomorphisme entre $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,an}$ et $\mathbb{C}$.

## 4.3 Fonctions analytiques sur les ouverts de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$

De la même manière que l'on avait distingué quatre cas lorsque nous avons décrit la topologie de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$, on distingue cinq types de fonctions analytiques, car l'on considèrera aussi l'ouvert $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ lui-même.

De plus, toujours dans un souci d'alléger les notations, nous nous permettrons, comme lors de la partie précédente, quelques identifications moyennant des applications bijectives que nous ne mentionnerons pas explicitement lors de la démonstration de la propriété qui va suivre. On peut notamment penser à l'homéomorphisme $a \mapsto |.|_\infty^a$ reliant un intervalle contenu dans une branche de l'arbre de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ à l'intervalle réel associé.

Par ailleurs, de la même manière que précédemment, nous nous intéresserons dans cette partie à des ouvers connexes. Cela permet de simplifier les preuves, et cela n'enlève en rien à la généralité des propriétés démontrées, car les topologies que l'on considère sont engendrées par des ouverts connexes (*c.f* les topologies sur $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{1,an}$ décrites en sous-section 3.1). Dans cette optique, on fera là encore l'identification (précisée en sous-section 2.2) entre intervalles réels et ouverts connexes de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

**Proposition 6**

Soit un ouvert connexe $U$ de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

1. Si $U$ est contenu dans la branche archimédienne, alors $\mathscr{O}(U) = \mathbb{R}$.
2. Si $U$ est contenu dans une branche $p$-adique, alors $\mathscr{O}(U) = \mathbb{Q}_p$.
3. Si $U$ est un voisinage de $|.|_0$, alors $\mathscr{O}(U) = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{c}\right]$ avec $c = \prod_{p \in \mathscr{P}_U} p$ où $\mathscr{P}_U$ désigne tous les nombres premiers correspondant à des $|.|_{p,0}$ n'appartenant pas à $U$.[5]
4. Si $U$ est un voisinage de $|.|_{p,0}$, alors $\mathscr{O}(U) = \mathbb{Z}_p$.
5. $\mathscr{O}(\mathcal{M}(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}$.

*Preuve.* On remarque tout d'abord que $\mathscr{K}_0 = \mathbb{Q}$ ici.

1. Soient $U = ]|.|_\infty^\alpha, |.|_\infty^\beta[$ un ouvert inclus dans la branche archimédienne (on a donc $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$)) et $f$ une fonction analytique sur $U$.

   Il n'y a ici aucun problème concernant l'ensemble d'arrivée, commun à tous les points de $U$ : pour tout $x \in U$, $\mathscr{H}(x) = \mathbb{R}$.

   Une traduction du fait que $f$ soit analytique sur $U$ est que, pour tout $x \in U$, il existe un ouvert $U' = ]|.|_\infty^{\alpha'}, |.|_\infty^{\beta'}[ \subset U$ contenant $x$ et une suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f - \frac{a_n}{b_n}\|_{U'} \leqslant \frac{1}{n+1}$. La condition "définie" ici n'ajoute aucune contrainte car l'écriture unique d'un rationnel comme quotient d'entiers n'ajoute aucune condition sur $b_n$. Or on remarque que $\|.\|_{U'} = \max(|.|_\infty^{\alpha'}, |.|_\infty^{\beta'})$. On peut alors vérifier que la topologie donnée par cette norme sur $U'$ est équivalente à celle donnée par la norme archimédienne usuelle $|.|_\infty$.

   On en déduit donc, $\frac{a_n}{b_n}$ étant constante sur $U'$, que $f$ est une fonction constante à valeurs dans le complété de $\mathscr{K}_0$ pour $|.|_\infty$, c'est à dire $\mathbb{R}$. Ainsi, puisque $\overline{U}$ est connexe, en travaillant sur un recouvrement fini de $\overline{U}$ (qui existe car on a montré que $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ était compact !), on en déduit que $f$ est constante sur $U$.

   Réciproquement, si l'on prend un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $|.|_\infty^a \in U$, par définition du complété, il existe bien une suite de rationnels convergeant vers ce réel $a$. En remarquant que la norme $\|.\|_{U'}$ n'est nulle autre que la norme de convergence uniforme sur $U'$, on peut en choisissant $U' = U$ en déduire que

5. D'après une remarque faite en sous-section 2.2, c'est un ensemble fini.

$a$ définit bien une fonction analytique sur $U$.

2. Soient p un nombre premier, $U = ]|.|_p^{\alpha}, |.|_p^{\beta}[$ un ouvert inclus dans la branche $p$-adique (on a donc $0 < \alpha < \beta < +\infty$)) et $f$ une fonction analytique sur $U$.

   On procède alors de la même manière que précédemment, en remarquant qu'ici, si $U' \subset U$ désigne un ouvert (pris là encore sous forme d'intervalle) de la définition de $f$, $\|.\|_{U'} = \max(|.|_p^{\alpha'}, |.|_p^{\beta'})$ est équivalente à la valeur $p$-adique $|.|_p$, et donc ici la fonction $f$ est constante et à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$, le complété de $\mathscr{K}_0 = \mathbb{Q}$ pour cette valeur absolue. On peut d'ailleurs montrer dans ce cas-ci qu'il y a croissance le long de la branche et donc que, nécessairement, $\|.\|_{U'} = |.|_p^{\beta'}$.

   Réciproquement, et là encore par définition du complété, on voit que si l'on prend un élément de $\mathbb{Q}_p$, il définira de manière unique une fonction analytique sur $U$.

3. Soient $U$ un voisinage de $|.|_0$ et $f$ une fonction analytique sur $U$. Fixons un élément $x$ de $U$.

   Il existe alors un ouvert $U' \subset U$ et une suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f - \frac{a_n}{b_n}\|_{U'} \leqslant \frac{1}{n+1}$. On note $\{p'_1, \dots p'_m\}$ l'ensemble des nombres premiers tels que $\forall k \in [\![1, m]\!]$, $|.|_{p'_k,0} \notin U'$.

   Ici, la condition " $\frac{a_n}{b_n}$ définie sur $U'$ " ajoute quelques contraintes. On doit notamment avoir $|b_n|_x \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui se traduit par : $\forall k \in [\![1, m]\!]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p'_k | b_n$.

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{c'}\right]$ où $c' = \prod_{k=1}^{m} p'_k$.

   En appliquant ceci à tous les éléments $x$ de $U$, on voit que ces derniers n'arrivent pas dans le même ensemble d'arrivée après qu'on leur ait appliqué $f$. Cependant ici cela ne pose pas vraiment de problème car on peut leur trouver un ensemble commun. En posant $c$ le produit des nombres premiers $p_k$ dénotant les extrémités non présentes dans $U$, on trouve que pour tout $x \in U$, $f(x) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{c}\right]$.

   En utilisant encore une fois un recouvrement fini de $\overline{U}$, on montre ainsi que $f$ est constante sur $U$ et est à valeurs dans $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{c}\right]$. Par ailleurs, on peut vérifier que $\|.\|_{U'} = \max\limits_{p\in\mathscr{P}_{U'}} (|.|_{\infty,\alpha}, |.|_{p,\beta_p})$ où les indices $\alpha$ et $\beta_p$ correspondent aux extrémités sur la branche archimédienne et sur les autres branches non entièrement incluses dans $U'$.

   Réciproquement, prenons $p$ un nombre premier tel que $p \wedge c = 1$.

   Alors l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{c}\right] & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \frac{n}{c^k} & \mapsto & (c^{-1})^k\overline{n} \end{pmatrix}$ est bien définie. En effet, $p \wedge c = 1$ donc $c$ est bien inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   On peut alors construire pour chaque élément $\frac{n}{c^k} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{c}\right]$ une suite de rationnels satisfaisant aux conditions de la définition d'une fonction analytique sur $U$, pour définir une telle fonction.

4. Soient p un nombre premier, $U = [|.|_{p,0}, |.|_{p,\alpha}[$ un voisinage connexe ouvert de $|.|_{p,0}$ et $f$ une fonction analytique sur $U$.

   Il existe alors un ouvert $U' = [|.|_{p,0}, |.|_{p,\beta}[ \subset U$ et une suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f - \frac{a_n}{b_n}\|_{U'} \leqslant \frac{1}{n+1}$. La condition "définie" impose ici que $p$ ne divise pas $b_n$.

   Par croissance le long de la branche $p$-adique, $\|.\|_{U'} = |.|_p^\alpha$, et donc (comme précédemment pour le travail sur le recouvrement) $f$ est constante et à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$ qui est le complété de $\mathbb{Z}$ pour $|.|_p$. (c'est bien la complétion qui a lieu ici car quel que soit $\alpha > 0$, $\|.\|_{U'}$ est bien équivalente à $|.|_p$).

   Réciproquement, si $u = \displaystyle\sum_{k\geqslant k_0} u_k\, p^k \in \mathbb{Z}_p$ :

   Alors nécessairement $k_0 \geqslant 0$ et donc $u$ peut être décrit comme une limite (au sens de $|.|_p$) d'éléments de $\mathbb{Z}$, en l'occurence des $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\, p^k$ pour $n \in \mathbb{N}$. On obtient là encore une fonction analytique sur $U$, d'après la construction qui précède.

5. D'après les résultats précédents, on déduit que $\mathscr{O}(\mathcal{M}(\mathbb{Z}))$ est inclus dans l'intersection des $\mathscr{O}(U)$ pour tous les ouverts $U$ de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$, donc en particulier en regardant le résultat sur les voisinages de la norme triviale, $\mathscr{O}(\mathcal{M}(\mathbb{Z})) \subset \mathbb{Z}$.

   Réciproquement, un entier $n \in \mathbb{Z}$ définit de manière unique une fonction analytique sur $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ : il suffit de prendre, pour tout $x \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})$, $U' = \mathcal{M}(\mathbb{Z})$ et $g$ le polynôme constant égal à $n.1_{\mathbb{K}}$.

$\square$

## Références


[Ber90] Vladimir Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedian fields.* 1990.

[Maz07] Pierre Mazet. *La preuve originale de S. Mazur pour son théorème sur les algèbres normées.* 11 janvier 2007.