Analyse semiclassique et applications en physique quantique

Vincent LOUATRON, encadré par Setsuro FUJIIE

Introduction

L'analyse microlocale désigne un domaine de l'analyse ayant vu le jour vers le milieu du XX$^{\text{e}}$ siècle et visant notamment à fournir de nouveaux outils pour l'étude d'équations aux dérivées partielles. Un des pères fondateurs de l'analyse microlocale, Lars Hörmander (qui a notamment effectué une partie de sa thèse sous la direction de Lars Gårding, qui a donné son nom aux inégalités éponymes présentées dans ce rapport), a apporté une contribution majeure dans la création du concept d'opérateur pseudo-différentiel, qui est une généralisation de la notion d'opérateur différentiel via des outils d'analyse de Fourier.

Une des applications de l'analyse microlocale est l'étude d'équations aux dérivées partielles de la physique quantique, notamment l'équation de Schrödinger. Une des idées fondamentales qui établit un lien étroit entre la mécanique classique et la mécanique quantique est que l'on peut retrouver des résultats fondamentaux de la mécanique classique en considérant que $\hbar = 0$ et en simplifiant de cette manière, dans la mesure du possible, les équations de la mécanique quantique. Un des exemples les plus emblématiques est bien sûr l'obtention du Principe Fondamental de la Dynamique de Newton à partir de l'équation de Schrödinger (au moyen d'une analogie entre . Une possibilité serait, pour avoir une analyse plus fine de la situation, de considérer de manière plus rigoureuse le caractère asymptotique de telles équations lorsque $\hbar$ "tend vers 0". C'est dans cette optique que l'analyse semiclassique, une spécialisation de l'analyse microlocale, fut crée pour pouvoir inclure des considérations portant sur la constante de Planck $\hbar$. Les opérateurs mis en jeu sont appelés opérateurs pseudo-différentiels semiclassiques.

Notations

- $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $D := \frac{1}{i}\partial = -i\partial$ où $\partial = \nabla$. Cet opérateur différentiel agit sur des fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- D'une manière similaire, on aura $D_{x_n} := \frac{1}{i}\partial_{x_n}$ et pour un multi-indice α, $D^\alpha := \frac{1}{i}\partial^\alpha$
- Pour $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$, on note $\sigma(z, w) := \langle Jz, w\rangle$ le produit symplectique canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$.
  En particulier si $z = (x, \xi)$ et $w = (y, \eta)$, on a $\sigma(z, w) = \langle \eta, x\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle y, \xi\rangle_{\mathbb{R}^n}$
- Pour deux fonctions $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, on définit le crochet de Poisson de a et b par :

$$\{a, b\} := \langle \partial_\xi a, \partial_x b\rangle - \langle \partial_x a, \partial_\xi b\rangle$$

- On notera en particulier $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $(y,\eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ les couples de variables dans $\mathbb{R}^{4n}$, et on notera :

$$\sigma(D) := \sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta) := \langle D_\eta, D_x \rangle - \langle D_y, D_\xi \rangle.$$

  Plus précisément, pour une fonction $f : (x,\xi,y,\eta) \in \mathbb{R}^{4n} \mapsto f(x,\xi,y,\eta) \in \mathbb{R}$, on aura :

$$\sigma(D)f = \sum_{k=1}^{n} (-i)^2 \partial_{\eta_k} \partial_{x_k} f - \sum_{k=1}^{n} (-i)^2 \partial_{y_k} \partial_{\xi_k} f$$

- Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Table des matières

1 Phase stationnaire

On considère une intégrale de la forme $I_h := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\varphi(x)}{h}} a(x)dx$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$. On notera K un compact contenant $supp(a)$. Pour simplifier les notations, on supposera que K contient 0. On s'intéresse au comportement asymptotique de cette intégrale lorsque $h \to 0$.

1.1 Cas à une dimension

Dans un premier cas, on s'intéresse au cas où φ' ne s'annule pas :

Proposition 1

Si $\forall x \in K$, $\varphi'(x) \neq 0$, alors $|I_h| \underset{h\to 0}{=} O(h^\infty)$, c'est à dire $|I_h| \underset{h\to 0}{=} O(h^k)$ pour tout entier k.

Preuve. L'idée est de procéder à des intégrations par parties.
On considère l'opérateur différentiel $L : u \mapsto \dfrac{h}{i\varphi'}u'$. Cet opérateur est bien défini sur $\mathcal{C}^\infty(K)$. On a posé cet opérateur afin d'avoir : $L(e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}) = e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}$.
On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_h = \int_K L^k(e^{\frac{i\varphi(x)}{h}})a(x)dx$.
Pour le produit scalaire $< u, v >:= \int_K uv$, on a :

$$\int_K L^k(e^{\frac{i\varphi(x)}{h}})a(x)dx = \int_K e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}(L^*)^k a(x)dx.$$

Par intégration par parties, on vérifie que $L^* : u \mapsto= -\dfrac{h}{i}\left(\dfrac{u}{\varphi'}\right)'$. En particulier, puisque a est $\mathcal{C}^\infty$, et donc a' est $\mathcal{C}^0$ sur le compact K, et que φ ne s'annule pas sur K, on a $L^*a = -\dfrac{h}{i}\left(\dfrac{a}{\varphi'}\right)' \underset{h\to 0}{=} O(h)$.
Il vient alors :

$$|I_h| \underset{h\to 0}{=} O(h^k).$$

Ce qui conclut. $\square$

Proposition 2

Si il existe $x_0 \in K$ tel que $\varphi'(x_0) = 0$, alors il existe une suite $(A_{2k}(x, D))_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'opérateurs différentiels telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante C_N telle que :

$$\left| I_h - e^{i\frac{\varphi(x_0)}{h}} \sum_{k=0}^{N-1} A_{2k}(x, D)a(x_0)h^{k+1/2} \right| \leq C_N h^{N+1/2} \sum_{0\leq m\leq 2N+2} \|a^{(m)}\|_\infty.$$

En particulier, lorsque $h \to 0$ on a I_h de la forme $\alpha h^{1/2} e^{i\frac{\varphi(x_0)}{h}} + O(h^{3/2})$.

C_N peut dépendre de K.

Preuve. On remarque tout d'abord que, quitte à déplacer l'origine, on peut supposer que $x_0 = 0$. On peut aussi supposer que $\varphi(0) = 0$ (quitte à retrancher la valeur de $\varphi(0)$ à φ).

L'idée est maintenant de se ramener à une transformée de Fourier afin de pouvoir utiliser des estimées sur cette transformée de Fourier. Pour cela il faudrait changer de variable pour transformer $e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}$ en quelque chose de la forme $e^{\frac{i\epsilon}{2}y^2}$ car les formules de transformation dont on dispose s'adressent aux formes quadratiques imaginaires (d'où le y^2). On considère pour cela la fonction suivante :

$$\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto 2\int_0^1 (1-t)\varphi''(tx)dt.$$

En intégrant par parties, il vient $\psi(x) = \dfrac{2\varphi(x)}{x^2}$ Pour x non nul. En fait, l'expression $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\psi(x)x^2$ est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier car $\varphi(0) = 0$. On fait ensuite un changement de variables au voisinage de 0 en posant $y = |\psi(x)|^{1/2}x$. C'est légitime, car au voisinage de 0, un développement de Taylor-Young donne $\psi(x) = \dfrac{2}{x^2}\left(\varphi(0) + x\varphi'(0) + \dfrac{x^2}{2}\varphi''(0) + o(x^3)\right) = \varphi''(0) + o(x)$.

Ainsi, $x \mapsto |\psi(x)|^{1/2}x$ est localement bijective (car strictement monotone, selon le signe de $\varphi''(0)$) au voisinage de 0. On a par ailleurs $\partial_y x = \dfrac{1}{|\varphi''(0)|^{1/2}}$.

On considère maintenant une partition de l'unité χ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi \equiv 0$ sur un voisinage de 0 et vérifiant : $signe(\varphi'') = \varphi''(0)$ sur le support de χ. On a ainsi :

$$I_h = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}\chi(x)a(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}(1-\chi(x))a(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\epsilon}{2h}y^2}u(y)dy + O(h^\infty).$$

Où on a noté ϵ le signe de $\varphi''(0)$ et $u : y \mapsto \chi(x(y))a(x(y))|\det \partial_y x|$. On a estimé l'intégrale de droite grâce à la Proposition 1. Il va maintenant s'agir de manipuler cette intégrale via des formules liées à l'analyse de Fourier. On admet que :

$$\mathcal{F}\left(e^{\frac{-i\epsilon}{2h}y^2}\right) = (2\pi h)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}\epsilon} e^{\frac{ih\epsilon\xi^2}{2}}.$$

En appliquant la formule $\displaystyle\int f\bar{g} = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}\bar{\hat{g}}$, on obtient alors :

$$I_h = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi)(2\pi h)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}\epsilon} e^{-\frac{ih\epsilon\xi^2}{2}} d\xi + O(h^\infty) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} h^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}\epsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi) e^{-\frac{ih\epsilon\xi^2}{2}} d\xi + O(h^\infty)$$

On étudie maintenant la partie intégrale de cette expression, $J(h,u) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi) e^{-\frac{ih\epsilon\xi^2}{2}} d\xi$. Puisque u est dans $\mathscr{S}$, $\hat{u}$ aussi et on donc une intégrale à paramètre indéfiniment dérivable. On a :

$$\partial_h J(h,u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi)\left(\frac{i\epsilon\xi^2}{2}\right) e^{-\frac{ih\epsilon\xi^2}{2}} d\xi = J(h, Pu) \text{ où l'on pose } P = -\frac{i\epsilon}{2}\partial^2.$$

Par ailleurs, par inversion de Fourier, on a $J(0,u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi) d\xi = 2\pi u(0)$. Il vient donc $\partial_h^k J(0,u) = 2\pi(P^k u)(0) = -i\pi\epsilon u^{(2k)}(0)$. Ainsi, un développement de Taylor avec reste intégral donne :

$$J(h,u) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^k}{k!} 2\pi\left(\frac{-i\epsilon}{2}\right)^k u^{(2k)}(0) + \frac{h^N}{N!} R_N(h,u).$$

Avec $R_N(h,u) = N\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{N-1} J(th, P^N u) dt$. Il existe ainsi une constante C_N telle que :

$$|R_N(h,u)| \leq C_N \|\widehat{P^N u}\|_{L^1} \leq C_N \sum_{k=0}^{2} \|\partial_h^k (P^N u)\|_\infty.$$

Or au voisinage de 0, on a $u(x) = \dfrac{a(x(xy))}{\varphi''(0)}$. On obtient le développement souhaité en posant A_2k tel que $A_{2k}.a(0) = 2\pi\left(\dfrac{-i\epsilon}{2}\right)^k u^{(2k)}(0)$. □

1.2 Phase stationnaire en dimension quelconque

En dimension $n > 1$, l'idée va être de se ramener à une phase φ quadratique pour pouvoir appliquer les formules de transformation de formes quadratiques imaginaires (c.f Zworski, p.40).

1.2.1 Phase quadratique

On suppose qu'il existe une matrice Q symétrique, réelle et inversible telle que $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\langle Qx, x\rangle$.

Théorème 1

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $I_h \underset{h\to 0}{=} (2\pi h)^{1/2} \dfrac{e^{\frac{i\pi}{4} sgn(Q)}}{|\det Q|^{1/2}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \dfrac{h^k}{k!} \left(\dfrac{\langle Q^{-1}D, D\rangle}{2i} \right)^k a(0) + O(h^N) \right)$

Où $sgn(Q)$ désigne $\sum_{\lambda \in \sigma_p(Q)} (-1)^{signe(\lambda)}$

Preuve. On procède ici de la même manière que précédemment. Par une des formules élémentaires (c.f annexe A), on a :

$$I_h = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{2h}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle \hat{a}(\xi)} a(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\left(e^{\frac{i}{2h}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle \hat{a}(\xi)} \right) \hat{a}(\xi)d\xi =$$

On applique maintenant la transformation sur l'exponentielle quadratique imaginaire, et il vient :

$$I_h = \frac{h^{n/2} e^{\frac{i\pi}{4} sgn(Q)}}{(2\pi)^{n/2}|detQ|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{2h}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle} \hat{a}(\xi)d\xi$$

On pose, d'une manière similaire à précédemment, $J(h,a) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{2h}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle} \hat{a}(\xi)d\xi$.

On a là encore $\partial_h J(h,a) = J(h, Pa)$ avec $P = -\dfrac{i}{2}\langle Q^{-1}D, D\rangle$ et $D = \dfrac{1}{i}\partial = \dfrac{1}{i}\nabla$.

On remarque qu'ici, le fait que l'on puisse appliquer la propriété de la dimension 1 est très spécifique au cas quadratique. En particulier, cela provient du produit scalaire et de la propriété $\mathcal{F}(D_x^\alpha \varphi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}$, qui permet d'écrire la transformée de Fourier comme un produit scalaire. On a par exemple, en dimension 2 :

$$\mathcal{F}\left(\langle MDa, Da\rangle\right) = \mathcal{F}\left(m_{1,1}(\partial_x a)^2 + 2m_{1,2}\partial_x a \partial_y a + m_{2,2}(\partial_y a)^2\right) = \langle M\xi, \xi\rangle \hat{a}$$

De la même manière que précédemment, on effectue un développement de Taylor avec reste intégral, ce qui donne un reste majorable via les estimées (c.f annexe). On obtient alors le résultat annoncé. ☐

1.2.2 Cas général pour φ

Proposition 3

Si $\partial\varphi \neq 0$ sur $K = supp(a)$, alors $I_h \underset{h\to 0}{=} O(h^\infty)$.

Preuve. La preuve est identique au cas unidimensionnel en remplaçant $L : u \mapsto \dfrac{h}{i\varphi'}u'$ par $L : u \mapsto \dfrac{h}{i}\dfrac{1}{|\partial\varphi|^2}\langle \partial\varphi, \partial u\rangle$, opérateur bien défini sur $\mathcal{C}^\infty(K)$. On vérifie là encore $L(e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}) = e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}$, et on vérifie que L^* est de "taille" h (c'est à dire un $O(h)$). On a donc le résultat annoncé. ☐

Pour étudier le cas général, nous introduisons une nouvelle nomenclature ainsi qu'un lemme intermédiaire.

Définition 1

On dit que $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a un **point critique non dégénéré** en un point $x_0\mathbb{R}^n$ si :

$$\partial\varphi(x_0) = 0 \text{ et } \det\left(\partial^2\varphi(x_0)\right) \neq 0$$

Où $\partial^2\varphi(x_0)$ désigne la matrice Hessienne associée à φ au point x_0.

Lemme 1 (Lemme de Morse)

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ possédant un point critique non dégénéré en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors il existe des voisinages U de 0 et V de x_0 et un difféomorphisme $\gamma : V \to U$ tels que

$$\left(\varphi \circ \gamma^{-1}\right)(x) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_n^2\right)$$

où r est le nombre de valeurs propres positives de la Hessienne $\partial^2\varphi(x_0)$ en x_0 de φ.

Preuve. On suppose, sans perte de généralité (c.f preuves précédentes) que $x_0 = 0$ et $\varphi(0) = 0$. Par Taylor-Young au voisinage de 0, on a :

$$\varphi(x) =_{x\to 0} \frac{1}{2}\left({}^t x\partial^2\varphi(0)x\right) + O(|x|^3).$$

En écrivant la Hessienne, qui est symétrique réelle et inversible, sous la forme $\partial^2\varphi(0) = {}^tRMR$ avec M diagonale et R orthogonale, on peut changer de variable en prenant Rx. En changeant une nouvelle fois de variable en prenant $\frac{1}{|\lambda_i|}x_i$ sur chaque coordonnée, on obtient :

$$\varphi(x) =_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_n^2\right) + O(|x|^3).$$

Il va donc s'agir de trouver le bon changement de variables, c'est à dire le difféomorphisme γ, qui fasse "disparaître" les termes d'ordre supérieur à 2.

D'une manière similaire au cas unidimensionnel, on a

$$\varphi(x) = \int_0^1 (1-t)\partial^2\varphi(tx)dt = \frac{1}{2}\langle x, Q(x)x\rangle$$

où $Q(x) = \partial^2\varphi(x)$, et en particulier $Q(0) = \partial^2\varphi(0) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

On veut trouver une application lisse $A : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\langle A(x)x, Q(0)A(x)x\rangle = \langle x, Q(x)x\rangle = {}^t x Q(x) x \tag{1.1}$$

Dès lors, il suffira de poser $\gamma(x) = A(x)x$.

Une condition suffisante pour (1) est

$${}^t A(x)Q(0)A(x) = Q(x) \tag{1.2}$$

On pose alors $F : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t AQ(0)A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'idée est alors de trouver un inverse à droite $G : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'application F, de sorte à avoir $F \circ G = id_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$ au voisinage de $Q(0)$. C.f Zworski, page 52 et page 325.

Il suffira alors de poser $A(x) := G(Q(x))$. On aura alors en effet, au voisinage de 0 :

$${}^t G(Q(x))Q(0)G(Q(x)) = Q(x) \Longleftrightarrow {}^t A(x)Q(0)A(x) = Q(x)$$

D'où :

$$\langle A(x)x, Q(0)A(x)x\rangle = {}^t x {}^t A(x) {}^t Q(0)A(x)x = {}^t xQ(x)x = \langle x, Q(x)x\rangle.$$

Le changement de variables $\gamma(x) := A(x)x$ donne alors $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\langle\gamma(x), Q(0)\gamma(x)\rangle$ et donc :

$$\left(\varphi \circ \gamma^{-1}\right)(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_n^2\right)$$

$\square$

Théorème 2 (Comportement asymptotique de la phase stationnaire)

Soient $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $x_0 \in K = supp(a)$ un point critique non dégénéré de φ. On suppose que $\partial\varphi(x_0) \neq 0$ sur $K \setminus \{x_0\}$. Alors il existe une suite $(A_{2k}(x, D))_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'opérateurs différentiels telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante C_N telle que :

$$\left| I_h - e^{i\frac{\varphi(x_0)}{h}} \sum_{k=0}^{N-1} A_{2k}(x, D)a(x_0)h^{k+1/2} \right| \leq C_N h^{N+1/2} \sum_{0\leq m\leq 2N+2} \|a^{(m)}\|_\infty.$$

En particulier, lorsque $h \to 0$ on a I_h de la forme $\alpha h^{1/2} e^{i\frac{\varphi(x_0)}{h}} + O(h^{3/2})$.
C_N peut dépendre de K.

Preuve. On suppose comme avant que $x_0 = 0$ et $\varphi(0) = 0$. En procédant comme pour la preuve de la proposition 2 (cas général unidimensionnel), avec une partition de l'unité, et en appliquant le Lemme de Morse et la proposition 1 (cas multidimensionnel non dégénéré), on peut écrire :

$$I_h = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i\varphi(x)}{h}} a(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{2h}\langle Qx,x\rangle} a(x)dx + O(h^\infty)$$

avec Q = $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$. et $u(x) = a(\kappa^{-1}(x))|det(\partial\kappa^{-1}(x))|$ avec κ un changement de variable approprié. On s'est alors ramené au cas quadratique, et on peut donc conclure. $\square$

1.2.3 Deux exemples importants

On introduit deux exemples qui seront utiles par la suite, et qui correspondent à deux formes particulières pour la phase φ.

Théorème 3

1. Soit $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et $\varphi := \langle x, \xi \rangle$ le produit scalaire euclidien. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x,y\rangle} a(x,y)dxdy \underset{h\to 0}{=} (2\pi h)^n \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^k}{k!} \left(\frac{\langle D_x, D_y \rangle}{i} \right)^k a(0,0) + O(h^N) \right) \tag{1.3}$$

2. Soit $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{4n})$. On note $z = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $w = (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$. On pose également $\sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta) := \langle D_\xi, D_y \rangle - \langle D_x, D_\eta \rangle$. On pose $\varphi(z,w) := \sigma(z,w) := \langle Jz, w \rangle$ la forme bilinéaire associée à la structure symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle Jz,w\rangle} a(x,y)dzdw \underset{h\to 0}{=} (2\pi h)^{2n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^k}{k!} \left(\frac{\sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta)}{i} \right)^k a(0,0) + O(h^N) \right) \tag{1.4}$$

2 Opérateurs pseudo-différentiels et quantification semiclassique

On considérera $h > 0$ dans toute cette section. La dépendance en h des fonctions que nous rencontrerons sera le plus souvent implicite, mais il sera bon de la garder à l'esprit, car l'étude des comportements asymptotiques des opérateurs rencontrés est au coeur de l'analyse semiclassique.

2.1 Symboles et quantifications

Définition 2 (Symboles)

On appelle **symbole** toute application $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, $a = a(x, \xi)$.

En physique, le processus de *quantification* désigne une transition entre une théorie classique et une théorique quantique. Plus précisément ici, on s'intéresse à la *quantification* de symboles $a = a(x, \xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, c'est à dire qu'on cherche à leur associer un opérateur linéaire $T : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ dépendant de h.

Définition 3 (Quantifications de symboles, opérateurs pseudo-différentiels)

On définit, pour $u \in \mathscr{S}$:

1. $\left[a^W(x, hD)\right](u)(x) := \dfrac{1}{(2\pi h)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a(\frac{x+y}{2}, \xi) u(y) dy d\xi$ **(quantification de Weyl)**
2. $\left[a(x, hD)\right](u)(x) := \dfrac{1}{(2\pi h)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) u(y) dy d\xi$ **(quantification standard)**
3. Pour $t \in [0, 1]$, $\left[\mathrm{Op}_t(a)\right](u)(x) := \dfrac{1}{(2\pi h)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a(tx + (1-t)y, \xi) u(y) dy d\xi$

On appelle **opérateur pseudo-différentiel semiclassique** tout opérateur de la forme $\mathrm{Op}_t(a)$.

Un des intérêts de la quantification de Weyl est sa symétrie : formellement, si a est à valeurs réelles, cet opérateur est auto-adjoint : sous réserve d'existence, pour $u, v \in \mathcal{S}$, on a $\langle a^W u, v \rangle = \langle u, a^W v \rangle$

Remarque

On remarque plusieurs choses :

- $\mathrm{Op}_1(a) = a(x, hD)$ et $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a) = a^W(x, hD)$. Ce sont en pratique les deux opérateurs que nous utiliserons.

- Pour la quantification standard, on a $[a(x, hD)](u) = \mathcal{F}_h^{-1}(a(x, .)\mathcal{F}_h(u)(.))$.
- La formule précédente est historiquement la définition des opérateurs pseudo-différentiels, qui ont été construits afin de résoudre les EDP du type $Au = f$ avec $A = a_\alpha \times (hD)^\alpha$. Pour peu que $A(\xi) = a_\alpha \xi^\alpha$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n$, une solution est donnée par $u := \mathcal{F}_h^{-1}\left(\frac{1}{A(\xi)}\mathcal{F}_h(f)(\xi)\right)$. On a en effet :

$$\begin{aligned}
Au(x) &= a_\alpha (hD)^\alpha \mathcal{F}_h^{-1}\left(\frac{1}{A(\xi)}\mathcal{F}_h(f)(\xi)\right) \\
&= a_\alpha \mathcal{F}_h^{-1}\left(\xi^\alpha \frac{1}{a_\alpha \xi^\alpha}\mathcal{F}_h(f)(\xi)\right) \\
&= \mathcal{F}_h^{-1}\mathcal{F}_h f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

  On est donc parti d'un opérateur différentiel A, et le u ainsi défini est un opérateur pseudo-différentiel. Ce que l'on a appelé $A(\xi)$ est le symbole de A.

Exemples. *Calculons la quantification de Weyl dans plusieurs cas particuliers (toujours avec a à valeurs réelles).*

- *Si $a(x, \xi) = \xi^\alpha$, alors on obtient :*

$$\begin{aligned}
\left[a^W(x, hD)\right](u)(x) &= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi\rangle}\xi^\alpha u(y)dyd\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x, \xi\rangle}\xi^\alpha \mathcal{F}_h(u)(\xi)d\xi \\
&= \mathcal{F}_h^{-1}\left(\xi^\alpha \mathcal{F}_h(u)(.)\right)(x) \\
&= (hD)^\alpha(u)(x)
\end{aligned}$$

  On remarque que dans ce cas, a ne dépendant pas de x, le résultat est indépendant de la quantification choisie. On d'ailleurs plus généralement : $Op_t(a)(u) = (hD)^\alpha u$.

- *Si* $a(x,\xi) = a(x)$*, alors on obtient en notant* $\phi(y) = a(\frac{x+y}{2})$ *:*

$$\begin{aligned}\left[a^W(x,hD)\right](u)(x) &= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle} a(\frac{x+y}{2})u(y)dyd\xi \\ &= \mathcal{F}_h^{-1}\left(\mathcal{F}_h(\phi u)(.)\right)(x) \\ &= \phi(x)u(x) \\ &= a(x)u(x)\end{aligned}$$

  Dans ce cas, la quantification de Weyl du symbole a est simplement la multiplication scalaire.

  On a en fait le même résultat pour le cas général : $Op_t(a)u = au$*, mais la preuve est différente.*

- *Si* $n = 1$ *et* $a(x,\xi) = x\xi$*, alors on obtient :*

$$\begin{aligned}\left[a^W(x,hD)\right](u)(x) &= \frac{1}{(2\pi h)^n}\frac{1}{2}x\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle}\xi u(y)dyd\xi + \frac{1}{(2\pi h)^n}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle}\xi y u(y)dyd\xi \\ &= \frac{h}{2}xDu(x) + \frac{1}{2}\mathcal{F}_h^{-1}\left(\xi\mathcal{F}_h(u(y)y)(.)\right)(x) \\ &= \frac{h}{2}xDu(x) + \frac{h}{2}D((.)*u(.))(x)\end{aligned}$$

  On peut réécrire cela avec un produit scalaire, ce qui donne par ailleurs la formule pour n quelconque :

$$\left[a^W(x,hD)\right](u)(x) = \frac{h}{2}\langle x, Du\rangle + \frac{h}{2}\langle D, xu\rangle$$

  Ou encore plus généralement :

$$Op_t(u)(x) = (1-t)h\langle x, Du\rangle + th\langle D, xu\rangle$$

  Où xu *désigne* $(.)*u(.)$*.*

On peut faire une autre remarque importante sur la possibilité de changer l'échelle (*rescaling*) :

Remarque

En posant $\tilde{x} := h^{\frac{1}{2}}x$, $\tilde{y} := h^{\frac{1}{2}}y$ et $\tilde{\xi} := h^{\frac{1}{2}}\xi$ on peut écrire :

$$a^W(x,hD) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n}} a_h\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2},\tilde{\xi}\right) e^{i\langle\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{\xi}\rangle}\tilde{u}(\tilde{y})d\tilde{y}d\tilde{\xi} = a_h^W(\tilde{x},D)\tilde{u}(\tilde{x})$$

où $\tilde{u}(\tilde{x}) := u(x) = u(h^{\frac{1}{2}}\tilde{x})$ et $a_h(\tilde{x}, \tilde{\xi}) := a(x, \xi) = a(h^{\frac{1}{2}}\tilde{x}, h^{\frac{1}{2}}\tilde{\xi})$

2.2 Composition d'opérateurs différentiels

Maintenant que nous avons défini ce que sont les opérateurs pseudo-différentiels semiclassiques, une des questions que l'on pourrait se poser est : est-ce que la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels est toujours un opérateur pseudo-différentiel ? Pour aborder cette question, on se propose de traiter en premier lieu le cas particulier des opérateurs différentiels classiques.

Considérons A et B les opérateurs différentiels définis par $A(x) := a_\alpha(x)(hD)^\alpha$ et $B(x) := b_\beta(x)(hD)^\beta$ avec a_α et b_β de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors on a, pour $u \in \mathscr{S}$:

$$\begin{aligned}
[A(x) \circ B(x)]\, u &= a_\alpha(x)(hD)^\alpha \left(b_\beta(x)(hD)^\beta u\right) \\
&= a_\alpha(x) \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (hD)^\gamma b_\beta(x)(hD)^{\beta+\alpha-\gamma} u
\end{aligned}$$

Par la formule de Leibniz.

Pour revenir aux notations propres aux opérateurs pseudo-différentiels, on est amené à associer à un opérateur un symbole, là où nous avions fait l'inverse lorsque nous avons défini les différentes quantifications. Pour les opérateurs différentiels,le processus se révèle moins complexe, car on définit tout simplement le **symbole** d'un opérateur différentiel de la forme $A = \sum_\alpha a_\alpha(x)(hD)^\alpha$ par $\sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$.
En termes de symboles, le symbole associé à la composition des opérateurs, noté $a\#b$, est :

$$a\#b(x, \xi) = a_\alpha(x) \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (hD)^\gamma b_\beta(x) \xi^{\beta+\alpha-\gamma} \tag{2.1}$$

2.3 Composition d'opérateurs pseudo-différentiels semiclassiques

Avant de pouvoir parler de composition, on doit considérer le résultat suivant, que l'on admettra ici [1] :

1. Ajout 30/10/2022 : On peut trouver une preuve de ces 2 affirmations dans le théorème 4.1 du livre de Zworski.

Proposition 4

Pour $t \in [0,1]$, on peut définir $\mathrm{Op}_t(a) : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ et $\mathrm{Op}_t(a) : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$, et ces applications sont continues.

On va par la suite s'intéresser à la composition d'opérateurs de Weyl. Il apparaît cependant que composer ainsi de tels opérateurs n'est pas chose aisée, et qu'il faut au préalable s'intéresser à des calculs d'opérateurs spécifiques. L'idée sera, pour composer deux opérateurs, de définir passer par une transformée de Fourier sur les opérateurs à l'aide de ce qu'on appelle des symboles linéaires (c.f lemme 2).

Proposition 5 (Quantification de symboles linéaires)

On considère un symbole de la forme $l(x,\xi) := \langle x^*, x\rangle + \langle \xi^*, \xi\rangle$ où $x^* \in \mathbb{R}^n$ et $\xi^* \in \mathbb{R}^n$ sont fixés. Alors on a :

$$\forall t \in [0,1], \mathrm{Op}_t(l) = \langle x^*, x\rangle + \langle \xi^*, hD\rangle.$$

Remarque

Les symboles linéaires n'étant rien d'autre que des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, on les identifiera implicitement (en fait, grâce au théorème de représentation de Riesz) à des vecteurs $l = (x^*, \xi^*) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Preuve. Par linéarité, on se ramène à calculer la quantification de $\langle x^*, x\rangle$ d'une part, et de $\langle \xi^*, hD\rangle$ d'autre part.

Comme vu précédemment, le premier symbole ne dépend pas de ξ, et donc son quantifié est $\langle x^*, x\rangle$.

Pour le second, on se ramène à une transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}_t(\langle \xi^*, \xi\rangle) &= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle}\langle \xi^*, \xi\rangle \mathcal{F}_h(u)\xi) d\xi \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathcal{F}_h^{-1}\left(\mathcal{F}_h(hD_{\xi_j}u)\right) \\
&= \langle \xi^*, hD\rangle(u)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque

On notera $l(x, hD) = l^W(x, hD) = \langle x^*, x\rangle + \langle \xi^*, hD\rangle$

A ce stade, on peut donner une première définition de composition de deux opérateurs pseudo-différentiels :

Proposition 6 (Exponentielles de symboles linéaires)

Soit un l un symbole linéaire de la forme précédente. Alors :

$$\left(e^{\frac{i}{h}l}\right)^W = e^{\frac{i}{h}l(x,hD)}$$

Où on a posé :

$$e^{\frac{i}{h}l(x,hD)}(u)(x) := e^{\frac{i}{h}\langle x^*,x\rangle + \frac{i}{2h}\langle x^*,\xi^*\rangle}u(x+\xi^*) \qquad (\star)$$

pour $u \in \mathscr{S}$. De plus, si $l, m \in \mathbb{R}^{2n}$ sont des symboles linéaires, alors :

$$e^{\frac{i}{h}l(x,hD)} \circ e^{\frac{i}{h}m(x,hD)} = e^{\frac{i}{2h}\sigma(l,m)}e^{\frac{i}{h}[l+m](x,hD)} \qquad (\star\star)$$

Remarque

La définition $(\star)$ permet de donner un sens à $(\star\star)$, car si $u \in \mathscr{S}$, alors l'application $e^{\frac{i}{h}l(x,hD)}(u)$ est aussi dans $\mathscr{S}$.

Preuve. On considère l'EDP suivante, avec $u \in \mathscr{S}$:

$$\begin{cases} ih\partial_t v + l(x,hD)v &= 0 \\ v(0) &= u \end{cases}$$

L'unique solution de cette EDP hyperbolique linéaire est donnée par $v(x,t) = e^{\frac{it}{h}l(x,hD)}u$ (méthode des caractéristiques). Avec les notations de la proposition 5, on a $v(x,t) = e^{\frac{i}{h}\langle tx^*,x\rangle}e^{\frac{i}{h}\langle tx^*,t\xi^*\rangle}u(x+t\xi^*) = e^{\frac{it}{h}\langle x^*,x\rangle}e^{\frac{it^2}{h}\langle x^*,\xi^*\rangle}u(x+t\xi^*)$.

Calculons maintenant la quantification de Weyl de ce symbole :

$$
\begin{aligned}
\left(e^{\frac{i}{h}l(x,\xi)}\right)^W u &= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle} e^{\frac{i}{h}\langle x^*,\frac{x+y}{2}\rangle} e^{\frac{i}{h}\langle \xi^*,\xi\rangle} u(y)dyd\xi \\
&= \frac{e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,x\rangle}}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y+\xi^*,\xi\rangle} e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,y\rangle} u(y)dyd\xi \\
&= \frac{e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,x\rangle}}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-z,\xi\rangle} e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,z+\xi^*\rangle} u(z+\xi^*)dzd\xi \\
&= \frac{e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,x\rangle} e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,\xi^*\rangle}}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x,\xi\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-i}{h}\langle z,\xi\rangle} e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,z\rangle} u(z+\xi^*)dy\right)d\xi \\
&= \frac{e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,x\rangle} e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,\xi^*\rangle}}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x,\xi\rangle}\mathcal{F}_h\left(e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,.\rangle}u(.+\xi^*)\right)(\xi)d\xi \\
&= e^{\frac{i}{h}\langle x^*,x\rangle} e^{\frac{i}{2h}\langle x^*,\xi^*\rangle} u(x+\xi^*) \\
&= e^{\frac{i}{h}l(x,hD)}.
\end{aligned}
$$

D'où le résultat annoncé. Une manière équivalente de procéder est de remarquer que la distribution tempérée $\delta_{\{y=x\}} := \dfrac{1}{(2\pi h)^n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle}$, qui n'est autre que le dirac en x, apparaît sur la 3e ligne.
Maintenant, il s'agit de vérifier $(\star\star)$. On note $l=(x^*,\xi^*)$ et $m=(y^*,\eta^*)$. On a d'une part :

$$
\begin{aligned}
\left[e^{\frac{i}{h}l(x,hD)}\circ e^{\frac{i}{h}m(x,hD)}\right](u)(x) &= e^{\frac{i}{h}l(x,hD)}\left(e^{\frac{i}{h}m(x,hD)}(u)\right)(x) \\
&= e^{\frac{i}{h}\langle x^*,x\rangle+\frac{i}{2h}\langle x^*,\xi^*\rangle} e^{\frac{i}{h}\langle y^*,x+\xi^*\rangle+\frac{i}{2h}\langle y^*,\eta^*\rangle} u(x+\eta^*+\xi^*) \\
&= e^{\frac{i}{h}\left[\frac{1}{2}(\langle\xi^*,y^*\rangle-\langle x^*,\eta^*\rangle)+\langle x^*,x\rangle+\langle y^*,x\rangle+\frac{1}{2}\langle x^*+y^*,\xi^*+\eta^*\rangle\right]} u(x+\eta^*+\xi^*) \\
&= e^{\frac{i}{2h}\sigma(l,m)+\frac{i}{h}[l+m](x,hD)} u(x+\eta^*+\xi^*)
\end{aligned}
$$

D'où $(\star\star)$. □

A ce stade, on a pu donner un sens à la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels de la forme $e^{\frac{i}{h}l}$. Ce sont les briques élémentaires permettant de construire la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels quelconques, et dans un premier lieu en particulier de deux opérateurs (ou quantifications) de Weyl.
Dans un premier temps, on va s'attacher à exprimer la quantification de Weyl en fonction de quantifications (de Weyl) de symboles de la forme $e^{\frac{i}{h}l}$. C'est l'objet du lemme 2.

Définition 4 (Transformation de Fourier de a^W)

Pour $a \in \mathscr{S}$ et $l \in \mathbb{R}^{2n}$, on définit :

$$\hat{a}(l) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-\frac{i}{h}l(x,\xi)} a(x,\xi) dx d\xi$$

Remarque

> Ici par définition l est un produit scalaire, et donc cette définition n'est qu'une notation pour la transformée de Fourier $\mathcal{F}_h$ sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Lemme 2 (Décomposition de Fourier de a^W)

Pour $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}$ et $l \in \mathbb{R}^{2n}$, on a :

$$a^W(x, hD) = \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{a}(l) e^{\frac{i}{h}l(x,hD)} dl$$

De plus, on peut donner un sens à cette égalité même si on a $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2 n)$: si $u, v \in \mathscr{S}$, on peut voir $\left\langle e^{\frac{i}{h}l(x,hD)} u, v \right\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$ comme une fonction $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ de la variable $l = (x^*, \xi^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ et écrire :

$$\left\langle a^W(x, hD)u, v \right\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \left\langle \hat{a}(l), \left\langle e^{\frac{i}{h}l(x,hD)} u, v \right\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} \right\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})}$$

Preuve. Pour la première égalité, on utilise simplement la formule d'inversion de Fourier dans $\mathbb{R}^{2n}$:

$$a(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}l(x,\xi)} \hat{a}(l) dl$$

En remarquant que $a^W(x, hD) = \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(e^{\frac{i}{h}l(x,\xi)}\right)^W \hat{a}(l) dl$, on en déduit par la proposition 6 que :

$$\begin{aligned} a^W(x, hD) &= \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(e^{\frac{i}{h}l(x,hD)}\right) \hat{a}(l) dl \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{a}(l) e^{\frac{i}{h}l(x,hD)} dl \end{aligned}$$

$\square$

Théorème 4 (Composition pour la quantification de Weyl)

Soient $a, b \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ deux symboles. Alors il existe un symbole $c \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que :

$$a^W(x, hD) \circ b^W(x, hD) = c^W(x, hD).$$

On note ce symbole $a\#b := c$. On a de plus :

$$a\#b(x,\xi) = e^{\frac{ih}{2}\sigma(D)} \left(a(x,\xi)b(y,\eta)\right)|_{y=x,\eta=\xi}. \tag{$\diamond$}$$

avec la notation habituelle $D = (D_x, D_\xi, D_y, D_\eta)$ et $\sigma(D) = \langle D_\eta, D_x\rangle - \langle D_y, D_\xi\rangle$.

De plus, on a une représentation intégrale pour $a\#b$ (avec $z = (x, \xi)$) :

$$a\#b(x,\xi) = \frac{1}{(\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-\frac{2i}{h}\sigma(w_1,w_2)} a(z+w_1)b(z+w_2)dw_1dw_2$$

Preuve. Dans un premier temps, on s'attache à exprimer la composition de a et b en utilisant la représentation fournie par le lemme précédent. On note donc $a^W(x, hD) = \dfrac{1}{(2\pi h)^{2n}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{a}(l) e^{\frac{i}{h}l(x,hD)}dl$ et $b^W(x, hD) = \dfrac{1}{(2\pi h)^{2n}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{b}(m) e^{\frac{i}{h}m(x,hD)}dl$. Il vient :

$$\begin{aligned}
a^W(x,hD)b^w(x,hD) &= \frac{1}{(2\pi h)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{a}(l)\hat{b}(m) e^{\frac{i}{h}l(x,hD)} e^{\frac{i}{h}m(x,hD)} dldm \\
&= \frac{1}{(2\pi h)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{a}(l)\hat{b}(m) e^{\frac{i}{2h}\sigma(l,m)} e^{\frac{i}{h}(l+m)(x,hD)} dldm \\
&= \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{c}_1(r) e^{\frac{i}{h}r(x,hD)} dr
\end{aligned}$$

où $c_1(r) := \dfrac{1}{(2\pi h)^{2n}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{a}(l)\hat{b}(r-l) e^{\frac{i}{2h}\sigma(l,r-l)} dl$ et avec le changement de variable $r = l + m$.

Il s'agit maintenant de montrer que $c_1 = c$ où c est le symbole défini en ($\diamond$). Puisque l'on ne dispose que de $\hat{c}_1$, on va montrer que $\hat{c} = \hat{c}_1$. On a, avec $z = (x, \xi)$ et $w = (y, \eta)$:

$$c(z) = e^{\frac{ih}{2}\sigma(D_z,D_w)} a(z)b(w)|_{w=z} = e^{\frac{i}{2h}\sigma(hD_z,hD_w)} a(z)b(w)|_{w=z}$$

et :

- $a^W(x,hD) = \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{a}(l) e^{\frac{i}{h} l(z)} dl$
- $b^W(x,hD) = \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{b}(m) e^{\frac{i}{h} m(w)} dm$
- $e^{\frac{i}{2h}\sigma(hD_z,hD_w)} e^{\frac{i}{h}(l(z)+m(w))} = e^{\frac{i}{2h}\sigma(l,m)\frac{i}{h}(l(z)+m(w))}$

La dernière ligne provenant du fait que $l(z) = \langle l, z\rangle$ and $m(w) = \langle m, w\rangle$. Avec cette écriture, on a par le lemme précédent :

$$\begin{aligned} c(z) &= \frac{1}{(2\pi h)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{a}(l)\hat{b}(m) e^{\frac{i}{2h}\sigma(hD_z,hD_w)} e^{\frac{i}{h}(l+m)(x,hD)} \Big|_{z=w} dldm \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{a}(l)\hat{b}(m) e^{\frac{i}{2h}\sigma(l,m)\frac{i}{h}(l(z)+m(z))} dldm \end{aligned}$$

Ainsi, la transformée de Fourier semiclassique de c est :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h(c)(r) &= \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}(l+m-r)(z)} dz \right) \hat{a}(l)\hat{b}(m) e^{\frac{i}{2h}\sigma(l,m)} dldm \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \delta_{\{l+m=r\}} \, , \, \hat{a}(l)\hat{b}(m) e^{\frac{i}{2h}\sigma(l,m)} \right\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})} dldm \\ &= \hat{c}_1(r) \end{aligned}$$

Comme remarqué après la définition 4, la notation $\hat{c}$ et $\mathcal{F}_h$ désignent le même objet. Par bijectivité de la transformation de Fourier (semiclassique), on a bien $c = c_1$, ce qui conclut. $\square$

On a ainsi une expression du symbole de $a\#b$, ainsi qu'une représentation intégrale. On s'intéresse maintenant à un développement asymptotique en $h \to 0$ de ce symbole. Avant d'écrire le théorème, on introduit une nouvelle notation :

Définition 5

Pour $\varphi \in \mathscr{S}$, on note $\varphi \underset{h\to 0}{=} O_{\mathscr{S}}(h^N)$ lorsque, pour tous multi-indices α, β :

$$|\varphi|_{\alpha,\beta} := \sup_{\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi \right| \leq C_{\alpha,\beta} h^N \tag{2.2}$$

Théorème 5 (Développement asymptotique du symbole de composition)

On suppose toujours $a, b \in \mathscr{S}$. Alors on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$a\#b(x,\xi) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{i^k h^k}{2^k k!}\, \sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta) a(x,\xi) b(y,\eta)|_{y=x,\eta=\xi} + O_{\mathscr{S}}(h^{N+1}). \tag{2.3}$$

En particulier, à l'ordre 2 on a :

$$a\#b(x,\xi) \underset{h\to 0}{=} ab + \frac{h}{2i}\{a,b\} + O_{\mathscr{S}}(h^2). \tag{2.4}$$

De plus, le commutateur des opérateurs pseudo-différentiels a^W et b^W vérifie :

$$\left[a^W(x,hD), b^W(x,hD)\right] = \frac{h}{i}\{a,b\}^W + O_{\mathscr{S}}(h^2). \tag{2.5}$$

Autrement dit, le commutateur est de l'ordre de grandeur de h.

Preuve. Pour prouver (2.3), on utilise la méthode de la phase stationnaire, et plus précisément la formule (1.4) en remplaçant σ par $-\sigma$ et h par $\frac{h}{2}$. D'après cette formule, il vient :

$$\begin{aligned}
a\#b(x,\xi) &= \frac{1}{(\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h/2}(-\sigma(w_1,w_2))} a(z+w_1) b(z+w_2) dw_1 dw_2 \\
&\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{(h/2)^k}{k!} \left(\frac{\sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta)}{-i}\right)^k a(z) b(z) + O(h^{N+1}) \\
&\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{i^k h^k}{2^k k!}\, \sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta) a(x,\xi) b(y,\eta)|_{y=x,\eta=\xi} + O_{\mathscr{S}}(h^{N+1})
\end{aligned}$$

En effet, a et b sont dans $\mathscr{S}$ donc les normes $|.|_{\alpha,\beta}$ des termes de la somme sont de taille $k \leq N$, ce qui légitime le passage de O à $O_{\mathscr{S}}$. On remarque dores et déjà que si les supports de a et b sont disjoints, alors chaque terme de la somme est nul et donc $a\#b = O_{\mathscr{S}}(h^\infty)$.

Intéressons-nous maintenant à 2.4. En reprenant la formule précédente, le terme d'ordre 0 est :

$$1 \times 1 \times a(x,\xi) b(x,\xi)$$

et le terme d'ordre 1 est :

$$\begin{aligned}
ih\frac{1}{2}\,\sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta)(a(x,\xi)b(y,\eta))|_{y=x,\eta=\xi} &= \frac{ih}{2}\,\left(\langle D_\eta, D_x\rangle - \langle D_y, D_\xi\rangle\right)(a(x,\xi)b(y,\eta))|_{y=x,\eta=\xi} \\
&= \frac{ih}{2}\,\left(\langle D_\eta b, D_x a\rangle - \langle D_y b, D_\xi a\rangle\right)|_{y=x,\eta=\xi} \\
&= \frac{ih}{2}\left(\langle D_\xi b, D_x a\rangle - \langle D_x b, D_\xi a\rangle\right) \\
&= \frac{ih}{2}\left(\frac{1}{i}\right)^2\{a,b\} \\
&= \frac{h}{2i}\{a,b\}
\end{aligned}$$

Pour finir, on remarque que la quantification de Weyl est une opération linéaire, et donc que le commutateur de a^W et b^W est :

$$\begin{aligned}
\left[a^W(x,hD), b^W(x,hD)\right] &= a^W b^W - b^W a^W \\
&= (a\#b)^W - (b\#a)^W \\
&= \left(ab + \frac{h}{2i}\{a,b\} - ba - \frac{h}{2i}\{b,a\} + O_{\mathscr{S}}(h^2)\right)^W \\
&= \frac{h}{2i}\left(\langle\partial_\xi a, \partial_x b\rangle^W - \langle\partial_x a, \partial_{xi} b\rangle^W - \langle\partial_\xi b, \partial_x a\rangle^W + \langle\partial_x b, \partial_{xi} a\rangle^W\right) + \left(O_{\mathscr{S}}(h^2)\right)^W \\
&= \frac{h}{i}\{a,b\}^W + O_{\mathscr{S}}(h^2)
\end{aligned}$$

$\square$

3 Classes de symboles

Jusqu'à présent, les symboles étaient des fonctions $a \in \mathscr{S}$ des variables (x, ξ) indépendantes du paramètre h. On s'intéresse ici à des symboles pouvant dépendre de h. L'analyse semiclassique nous place dans un cadre où l'on étudie des comportements asymptotiques lorsque h tend vers 0, aussi on s'autorisera sans justification des hypothèses pour majorer la valeur de h. Aussi, certains résultats ne seront montrés non pas pour tout $h > 0$ mais pour tout $0 < h < h_0$ où h_0 sera une valeur strictement positive.

3.1 Fonctions d'ordre

Définition 6

Soit $m : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable. On dit que m est une **fonction d'ordre** si il existe une constante $C > 0$ et un $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$x, y \in \mathbb{R}^{2n}, m(x) \leq C\langle x - y\rangle^N m(y). \tag{3.1}$$

Exemples. *Les fonctions constantes sont des fonctions d'ordre. Les fonctions de la forme $x \mapsto \langle x\rangle^a$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont aussi des fonctions d'ordre. En effet, pour le cas $a = 1$ on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{\langle x\rangle^2}{\langle y\rangle^2\langle x - y\rangle^2} &= \frac{1 + |x - y + y|^2}{\langle y\rangle^2\langle x - y\rangle^2} \\
&\leq \frac{1 + |x - y|^2 + |y|^2}{\langle y\rangle^2\langle x - y\rangle^2} \\
&\leq \frac{1 + |x - y|^2 + 1 + |y|^2}{\langle y\rangle^2\langle x - y\rangle^2} \\
&\leq \frac{\langle y\rangle^2 + \langle x - y\rangle^2}{\langle y\rangle^2\langle x - y\rangle^2} \\
&\leq \frac{1}{\langle y\rangle^2} + \frac{1}{\langle x - y\rangle^2} \\
&\leq 2
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité avec $N = 1$ et $C = \sqrt{2}$. Ensuite, pour retrouver le cas général, il suffit d'élever à la puissance a pour le cas $a \geq 0$:

$$\langle x\rangle^a \leq C^a\langle x - y\rangle^{Na}\langle y\rangle^a$$

d'où le résultat en prenant $C = C^a$ et $N = \lfloor Na \rfloor + 1$ pour constantes. Pour le cas $a < 0$, il suffit de voir qu'il y a symétrie des rôles entre x et y :

$$\langle y \rangle \leq C^a \langle x - y \rangle^{Na} \langle x \rangle$$

D'où :

$$\langle x \rangle^{-1} \leq C^a \langle x - y \rangle^{Na} \langle y \rangle^{-1}$$

En passant ensuite à la puissance $-a > 0$ et en inversant, on retrouve l'inégalité précédente.

Proposition 7

Si m_1 et m_2 sont des fonctions d'ordre, alors $\dfrac{1}{m_1}$ et $m_1 m_2$ le sont aussi.

Preuve. Comme remarqué précédemment, x et y jouent un rôle symétrique dans (3.1). On a donc $m_1(y) \leq C\langle x - y \rangle^N m_1(x)$ et donc :

$$\frac{1}{m_1(x)} \leq C \langle x - y \rangle^N \frac{1}{m_1(y)}$$

car m_1 est à valeurs strictement positives.

Pour le produit, en notant respectivement C_1, N_1 et C_2, N_2 les constantes associées respectivement à m_1 et m_2, on a tout simplement :

$$m_1(x) m_2(x) \leq C \langle x - y \rangle^N m_1(y) m_2(y)$$

avec $N = N_1 + N_2$ et $C = C_1 C_2$. □

Définition 7

Soit m une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^{2n}$. On définit les ensembles :

- $S(m) = \{a \in \mathcal{C}^\infty | \forall \alpha, \exists C_\alpha \, ; \, |\partial^\alpha a| \leq C_\alpha m\}$
- $S_\delta(m) = \left\{a \in \mathcal{C}^\infty | \forall \alpha, \exists C_\alpha \, ; \, |\partial^\alpha a| \leq C_\alpha h^{-\delta|\alpha|} m \right\}$.

On appelle de tels ensembles des **classes de symboles**.

On notera en particulier $S = S(1)$ et $S_\delta = S_\delta(1)$. Pour préciser quand cela sera nécessaire, on pourra aussi noter $S_k(m)$ lorsque l'on considère fonction de k variables.

Remarque

On prendra, toujours $\delta \leq \frac{1}{2}$. En effet, si $\delta > \frac{1}{2}$, on ne peut plus donner de sens à certains développements asymptotiques, à commencer par celui de $a\#b = ab + \frac{h}{2}\{a,b\} + O(h^2)$. Dans le terme $\{a,b\}$, des dérivées d'ordre 1 pour a et 1 pour b apparaissent, et peuvent potentiellement être de taille $h \times h^{-2\delta}$ avec $-2\delta < 0$. On aurait alors un terme d'ordre 1 non borné en h, ce qui serait absurde. On portera ainsi une attention particulière au cas $\delta = 1/2$, qui correspond au cas limite où le terme d'ordre 1 est borné mais ne disparaît pas lorsque $h \to 0$.

3.2 Séries asymptotiques

Définition 8

Soit m une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^{2n}$ et $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de symboles de $S_\delta(m)$. On dit que $a \in S_\delta(m)$ est **asymptotique** à $\sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$, et on note $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$ si :

$$\left| a - \sum_{j=0}^{N-1} h^j a_j \right| = O_{S_\delta(m)}(h^N) \tag{3.2}$$

où la notation $O_{S_\delta(m)}(h^N)$ signifie que pour chaque multi-indice α, il existe $C_{\alpha,N}$ tel que

$$\left| \partial^\alpha \left(a - \sum_{j=0}^{N-1} h^j a_j \right) \right| \leq C_{\alpha,N} h^{N-\delta|\alpha|} m.$$

Remarque

La série $\sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$ n'est pas nécessairement une série convergente, mais bien une notation liée à l'équation (3.2) que vérifient les sommes partielles.

Si la définition ci-dessus est vérifiée, on appelle a_0 le **symbole principal** de a.

Le théorème suivant permet à l'inverse d'associer un symbole a à une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (S_\delta(m))^{\mathbb{N}}$.

Théorème 6 (Théorème de Borel)

Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (S_\delta(m))^{\mathbb{N}}$. Alors il existe un symbole $a \in S_\delta(m)$ tel que :

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j.$$

De plus, si on a également $\hat{a} \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$, alors $a - \hat{a} = O_{S_\delta(m)}(h^\infty)$.

Preuve. On considère une fonction plateau $0 \leq \chi \leq 1$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[0,1]$ et $\chi \equiv 0$ sur $[2,+\infty[$. Pour des raisons qui apparaîtront dans les calculs, on suppose $0 < h \leq 1$. On pose :

$$a := \sum_{j=0}^{\infty} h^j \chi(\lambda_j h) a_j$$

où l'on précisera le choix de la suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ plus tard. On ne requiert pour l'instant de cette suite que $\lambda_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$\begin{aligned} h^j \chi(\lambda_j h)|\partial^\alpha a_j| &\leq h^j \chi(\lambda_j h) C_{j,\alpha} h^{-\delta|\alpha|} m \\ &\leq h^j \chi(\lambda_j h) C_{j,\alpha} h^{-\delta|\alpha|} m \frac{\lambda_j h}{\lambda_j h} \\ &\leq h^{j-1-\delta|\alpha|} m \frac{2C_{j,\alpha}}{\lambda_j} \\ &\leq h^{j-1-\delta|\alpha|} 2^{-j} m \end{aligned} \qquad (\star)$$

en posant par exemple $\lambda_j = C_{j,\alpha} 2^{j+1}$. Pour des raisons pratiques, on supposera aussi, quitte à remplacer λ_j par $\max\limits_{0\leq k\leq j} \left(C_{k,\alpha} 2^k\right)$, que la suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On fixe maintenant un multi-indice α et un entier $N \geq |\alpha|$. On décompose $a - \sum_{j=0}^{N} h^j a_j$ de la manière suivante :

$$a - \sum_{j=0}^{N} h^j a_j = \sum_{j=N+1}^{\infty} h^j a_j \chi(\lambda_j h) + \sum_{j=0}^{N} h^j a_j (\chi(\lambda_j h) - 1)$$

On a :

$$\left|\partial^\alpha\left(a-\sum_{j=0}^N h^j a_j\right)\right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} h^j\chi(\lambda_j h)|\partial^\alpha a_j| + \sum_{j=0}^N h^j(1-\chi(\lambda_j h))|\partial^\alpha a_j|$$

D'après l'inégalité ($\star$) précédente, la somme de gauche vérifie :

$$\begin{aligned}\sum_{j=N+1}^{\infty} h^j\chi(\lambda_j h)|\partial^\alpha a_j| &\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} h^{j-1-\delta|\alpha|}2^{-j}m \\ &\leq \frac{1}{2^{N+1}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{h}{2}\right)^j\right)h^{N-\delta|\alpha|}m \\ &\leq h^{N-\delta|\alpha|}m\end{aligned}$$

car $h<2$. D'une autre part, la somme de droite vérifie :

$$\sum_{j=0}^N h^j(\chi(\lambda_j h)-1)|\partial^\alpha a_j| \leq \sum_{j=0}^N(1-\chi(\lambda_j h))C_{j,\alpha}h^{j-\delta|\alpha|}$$

On remarque alors que :

- Si $0<h\lambda_N\leq 1$, puisque $\chi\equiv 1$ sur $[0,1]$, la somme de droite serait nulle.
- Si $1\leq h\lambda_N$ alors, puisque $h\leq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^N(1-\chi(\lambda_j h))C_{j,\alpha}h^{j-\delta|\alpha|} &\leq \sum_{j=0}^N C_{j,\alpha}h^j h^{-\delta|\alpha|} \\ &\leq C'_{N,\alpha}h^{-\delta|\alpha|} \\ &\leq C'_{N,\alpha}(\lambda_N h)^N h^{-\delta|\alpha|} \\ &\leq C''_{N,\alpha}h^{N-\delta|\alpha|}.\end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a bien une constante $C_{N,\alpha}$ telle que :

$$\left|\partial^\alpha\left(a-\sum_{j=0}^N h^j a_j\right)\right| \leq C_{N,\alpha}h^{N-\delta|\alpha|}m.$$

En particulier, quitte à changer la constante $C_{N,\alpha}$, la somme à gauche peut s'arrêter à $N-1$. On a montré cela pour tout entier $N\geq\alpha$, et ce pour α quelconque, d'où le résultat. $\square$

4 Inversion et inégalités de Gårding

Dans la partie 3, nous avons étudié la composition d'opérateurs pseudo-différentiels semiclassiques. Nous nous intéressons maintenant à une autre opération algébrique : l'inversion de tels opérateurs.

4.1 Inversion

On remarque que, pour un symbole $a : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$, le fait de ne jamais s'annuler est lié (via le théorème d'inversion locale) à l'inversibilité (au moins locale). En un certain sens, c'est aussi le cas pour les symboles de $S_\delta(m)$.

Définition 9 (Symboles ellptiques)

On dit qu'un symbole $a : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ est **elliptique** si il existe $\gamma > 0$ tel que

$$|a| \geq \gamma > 0.$$

On dit qu'un symbole $a \in S(m)$ est **elliptique** si il existe $\gamma > 0$ tel que

$$|a| \geq \gamma m.$$

Théorème 7 (Inversion pour les symboles elliptiques)

Soit $a \in S_\delta(m)$ pour un $0 \leq \delta \leq \dfrac{1}{2}$. On suppose que a est elliptique dans $S_\delta(m)$. Alors :

- Si $m \geq 1$, alors il existe $h_0(m) = h_0 > 0$ tel que :

$$\forall u \in \mathscr{S},\ \forall 0 < h < h_0,\ \left|\left|a^W(x, hD)u\right|\right|_{L^2} \geq C \left|\left|u\right|\right|_{L^2}$$

- Si $m \equiv 1$, alors il existe $h_0 > 0$ tel que $a^W(x, hD)^{-1}$ soit défini en tant qu'opérateur linéaire borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $0 < h < h_0$.

Preuve. On considère le symbole $b := \dfrac{1}{a}$. On montre tout d'abord que $b \in S_\delta(\dfrac{1}{m})$:

$$\forall \alpha,\ |\partial^\alpha b| \leq \left|\frac{-1}{a^2}\right| C_\alpha h^{-\delta|\alpha|} m \leq C'_\alpha h^{-\delta|\alpha|} \frac{1}{m}$$

avec $C_\alpha^{'} = \dfrac{C_\alpha}{\gamma^2}$. Ensuite, en considèrant le développement de $a\#b$ à l'ordre 2, on peut écrire qu'il il existe $r_1, r_2 \in S_\delta$ tels que

$$a\#b = 1 + h^{1-2\delta} r_1 \quad \text{et} \quad b\#a = 1 + h^{1-2\delta} r_2$$

On note $A := a^W(x, hD)$, $B := b^W(x, hD)$, $R_1 := r_1^W(x, hD)$, $R_2 := r_2^W(x, hD)$ les opérateurs de L^2 associés à a, b, r_1 et r_2. On a alors

$$AB = 1 + R_1 \quad \text{et} \quad BA = 1 + R_2.$$

De plus, R_1 et R_2 vérifient

$$||R_1||_{L^2 \to L^2}\, ,\ ||R_1||_{L^2 \to L^2} = O(h^{1-2\delta}).$$

En particulier, on choisit $h_0 > 0$ tel que ces deux normes soient majorées par $\dfrac{1}{2}$, de façon à pouvoir inverser $1 + R_1$ et $1 + R_2$. On note respectivement C_1 une inverse à droite de $1 + R_1$ et C_2 une inverse à gauche de $1 + R_2$. C'est à cet instant que l'on différencie les cas selon m :

- Si $m = 1$, alors d'après le théorème sur la bornitude L^2 des symboles dans $S = S(1)$, A et B sont des opérateurs bien définis de L^2, et on peut donc écrire

$$\begin{cases} A\,(BC_1) & = I \\ (C_2 B)\,A & = I \end{cases}$$

  et conclure que $A = a^W(x, hD)$ est un opérateur de L^2 inversible.

- Si $m \geq 1$, alors on remarque que $S(1/m) \subset S(1) = S$ et donc par le même théorème, $B = b^W$ est un opérateur borné de L^2. Il vient alors

$$||u||_{L^2} = ||(C_2 BA)\,u||_{L^2} \leq C\, ||A||_{L^2 \to L^2}$$

  d'où le résultat annoncé (où notre constante $C = ||C_2||\, ||B||$ joue le rôle de $1/C$ dans le théorème).

$\square$

4.2 Inégalités de Gårding

Théorème 8 (Inégalité de Gårding faible)

Soit $a \in S$ un symbole à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que a vérifie $a \geq \gamma > 0$ sur $\mathbb{R}^{2n}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n),\, \forall\, 0 < h < h_0,\, \langle a^W(x, hD)u, u\rangle \geq (\gamma - \varepsilon)\, ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, .$$

Preuve. Pour montrer ceci, nous allons utiliser le théorème13 (un résultat portant sur le spectre des opérateurs auto-adjoints, c.f annexe C). Ici, $a \in S$ donc $A = a^W$ est un opérateur auto-adjoint et borné de L^2, donc le théorème s'applique. On va en particulier chercher à montrer que $\sigma(A) \subset [\gamma - \epsilon, +\infty[$. Fixons $\varepsilon > 0$. On fixe également un réel λ tel que $\lambda < \gamma - \epsilon$. On pose $b := (a - \lambda)^{-1}$.
De la même manière que précédemment, on remarque que $b \in S$ et ce grâce à l'inégalité vérifiée par a :

$$\forall \alpha,\, |\partial^\alpha b| \leq \left| \frac{-1}{(a-\lambda)^2} \right| C_\alpha \leq \varepsilon^2 C_\alpha.$$

car $a - \lambda \geq \gamma - \lambda \geq \varepsilon > 0$. De plus, on a

$$(a - \lambda)\#b = (a - \lambda)b + \frac{h}{2i}\{(a - \lambda), b\} + O_S(h^2).$$

Or le crochet de Poisson s'annule :

$$\begin{aligned}
\{(a - \lambda), b\} &= \langle \partial_\xi((a - \lambda)), \partial_x b\rangle - \langle \partial_x((a - \lambda)), \partial_\xi b\rangle \\
&= \frac{-1}{(a-\lambda)^2} \left(\langle \partial_\xi a, \partial_x a\rangle - \langle \partial_x a, \partial_\xi a\rangle\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi $(a - \lambda)\#b = 1 + O_S(h^2)$. En passant cette égalité à la quantification de Weyl, on obtient :

$$(A - \lambda I)B = I + O_{L^2 \to L^2}(h^2).$$

En effet, 'opérateur de la quantification de Weyl est linéaire et borné, donc transforme une fonction $O_S(h^N)$ en une fonction $O_S(h^N)$. En effectuant la même démarche avec $b\#(a - \lambda)$, on obtient $B(A - \lambda I) =$

$I + O_{L^2 \to L^2}(h^2)$, c'est à dire un inverse approximatif à gauche. Par la même démonstration que dans le théorème précédent, quitte à choisir un h_0 suffisamment petit pour avoir $||B|| < 1$, on peut en conclure que $A - \lambda I$ est inversible comme opérateur de L^2.

On a montré que pour tout $\lambda < \gamma - \epsilon$, $A - \lambda I$ est inversible, donc on en déduit que $\sigma(A) \subset [(\gamma - \varepsilon), +\infty[$ et donc, d'après le théorème 13, on a :

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n),\, \forall\, 0 < h < h_0,\, \langle a^W(x, hD)u, u\rangle \geq (\gamma - \varepsilon)\, ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

$\square$

On peut affiner l'inégalité précédente en affaiblissant l'hypothèse sur a. Pour ce faire, on va tout d'abord montrer le lemme suivant qui sera utile lors de la preuve :

Lemme 3 (Une estimation du gradient)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ positive dont la hessienne vérifie $|\partial^2| \leq A$. Alors

$$|\partial f| \leq \sqrt{2Af}.$$

Preuve. La fonction f étant $\mathcal{C}^2$, on a par le théorème de Taylor avec reste intégral

$$f(x+y) = f(x) + \langle \partial f(x), y\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} (1-t)\langle \partial^2 f(x+ty)y, y\rangle dt.$$

En prenant $y := \dfrac{-1}{A}\partial f(x)$, on a

$$\frac{1}{A}\langle \partial f(x), \partial f(x)\rangle = f(x) - f(x+y) - \int_{\mathbb{R}^n} (1-t)\rangle \partial^2 f(x - \frac{t}{A}\partial f(x))\frac{1}{A}\partial f(x), \frac{1}{A}\partial f(x)\langle dt.$$

En particulier, en utilisant la positivité de f et l'hypothèse sur la hessienne de f, il vient

$$\frac{1}{A}|\partial f(x)|^2 \leq f(x) - 0 + \frac{1}{A^2}A|\partial f(x)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1-t)dt = f(x) + \frac{1}{2A}|\partial f(x)|^2$$

d'ou $|\partial f|^2 \leq 2Af$, ou encore $|\partial f| \leq \sqrt{2Af}$ comme annoncé. $\square$

Théorème 9 (Inégalité de Gårding forte)

Soit $a \in S$ tel que $a \geq 0$ sur $\mathbb{R}^{2n}$. Alors il existe $C > 0$, $h_0 > 0$ tels que :

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n),\, \forall\, 0 < h < h_0,\, \langle a^W(x, hD)u, u\rangle \geq -Ch\,||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Preuve. L'idée est similaire à la preuve précédente : nous allons montrer que $\sigma(a^W) \subset [-\lambda, +\infty[$ avec un λ bien choisi (et dépendant de h), puis utiliser le théorème 13.
Dans un premier temps, l'objectif est de trouver une constante $\tilde{h}$ telle que $\lambda := \dfrac{h}{\tilde{h}}$ vérifie

$$h(a+\lambda)^{-1} \in \tilde{h}S_{1/2}$$

c'est à dire que pour tout α, on ait $|\partial(a+\lambda)^{-1}|C_\alpha h^{\frac{|\alpha|}{2}}\tilde{h}$ où C_α est indépendante de $\tilde{h}$ et h.
Pour montrer ceci, il est nécessaire d'expliciter un minimum $\partial^\alpha(a+\lambda)^{-1}$. On peut montrer par récurrence que

$$\partial^\alpha(a+\lambda)^{-1} = (a+\lambda)^{-1}\sum_{k=1}^{|\alpha|}\sum_{\alpha=\beta_1+\cdots+\beta_k} C_{\beta_1,\ldots,\beta_k}\prod_{j=1}^{k}\Big((a+\lambda)^{-1}\partial^{\beta_j}a\Big)\,.$$

Le principe est que chaque terme fait intervenir une certaine puissance de $(a+\lambda)^{-1}$ multiplié par un terme de la forme $\partial^{\beta_j}a$. Il suffit ensuite de compter les manières de former le n-uplet α comme somme de n-uplets β_j plus petits (et non nuls), ce qui est représenté par les indices des deux sommes.
Ensuite, on utilise le lemme précédent pour majorer les termes du produit. On a tout d'abord, en majorant terme à terme la matrice hessienne, une constante C telle que $|\partial^2 f| \leq C$. Le lemme précédent donne alors

$$\lambda^{1/2}|\partial a| \leq C\lambda^{1/2}a^{1/2} \leq C(\lambda + a)$$

où l'on a utilisé l'inégalité arithmético-géométrique pour la dernière inégalité (quitte à diviser C par 2). On a une majoration du gradient ici, donc on a en particulier , pour $|\beta| = 1$,

$$|\partial^\beta a|(a+\lambda)^{-1} \leq C\lambda^{-1/2}.$$

D'autre part, puisque $a \in S$, on a pour $|\beta| \geq 2$

$$|\partial^\beta a|(a+\lambda)^{-1} \leq C\lambda^{-1}$$

quitte là encore à changer la constante C pour qu'elle soit la même que précédemment.
Dans tous les cas, si $0 < \lambda \leq 1$, on a

$$\left|\prod_{j=1}^{k}\left((a+\lambda)^{-1}\partial^{\beta_j}a\right)\right| \leq C\prod_{|\beta_j|\geq 2}\lambda^{-1}\prod_{|\beta_j|=1}\lambda^{-1/2} \leq \prod_{j=1}^{k}\lambda^{-\frac{|\beta_j|}{2}} = C\lambda^{-\frac{|\alpha|}{2}}.$$

On a alors $(a+\lambda)^{-1} \in \frac{\tilde{h}}{h}S_{1/2}$ et donc $h(a+\lambda)^{-1} \in \tilde{h}S_{1/2}$ avec des estimées indépendantes de λ.
On s'intéresse maintenant, comme dans la preuve précédente, à $(a+\lambda)\#(a+\lambda)^{-1}$, ce qui est légitime puisque $(a+\lambda) \in S \subset S_{1/2}$. On utilise ici une formule de Taylor avec reste intégral, pour éviter des problèmes d'écriture de développements en $h \to 0$ (c.f remarque suivant la définition 7). Il vient :

$$\begin{aligned}(a+\lambda)\#(a+\lambda)^{-1} &= e^{ih\frac{1}{2}\sigma(D)}(a(z)+\lambda)((a(w)+\lambda)^{-1})\Big|_{w=z} \\ &= 1+0+\int_0^1 (1-t)e^{ih\frac{1}{2}\sigma(D)}\left(ih\frac{1}{2}\sigma(D)\right)^2(a(z)+\lambda)((a(w)+\lambda)^{-1})\Big|_{w=z} dt.\end{aligned}$$

On a utilisé comme dans la preuve précédente que $\frac{h}{2}\{(a+\lambda),(a+\lambda)^{-1}\} = 0$. On note $r(z)$ l'intégrale ci-dessus.
On a montré précédemment que $h(a+\lambda)^{-1} \in \tilde{h}S_{1/2}$, donc on a $h^2\partial^\alpha(a+\lambda)^{-1}) \in \tilde{h}S_{1/2}$ pour $|\alpha| = 2$. D'après le théorème (4.17 à rajouter), $\tilde{h}S_{1/2}$ est stable par l'opérateur $e^{\frac{ih}{2}\sigma(D)}$ donc on en déduit que $r \in \tilde{h}S_{1/2}$. Ainsi, en fixant $\tilde{h}$ suffisamment petit, on obtient

$$||r^W(x,hD||_{L^2\to L^2} \leq C\tilde{h} \leq \frac{1}{2}.$$

Cela est possible tout en conservant $\lambda \leq 1$, il suffit de travailler pour $h < h_0$ avec h_0 suffisamment petit (ceci indépendamment de $\tilde{h}$).
Ainsi, à ce stade, en reprenant la preuve du théorème précédent on a construit une inverse approximative à droite pour $((a+\lambda)^{-1})^W = a^W + \lambda$ (et on peut de même en construire une à gauche), donc $(a^W+\lambda)^{-1}$ existe en tant qu'opérateur de L^2. Ainsi, le spectre de a^W vérifie $\sigma(a^W) \subset [-\lambda, +\infty[$. D'après le théorème

13, il vient alors :

$$\forall u \in L^2,\ \langle a^W(x,hD)u,u\rangle \geq -\lambda \left|\left|u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

d'où le résultat (car $\lambda = \dfrac{h}{\tilde{h}}$). □

5 Application : conservation d'énergie en mécanique quantique

5.1 Front d'onde semiclassique

On considère maintenant $u \in L^2(R^n)$ avec $\left|\left|u\right|\right|_{L^2} \leq 1$.

Remarque

Comme précédemment on ne fait pas apparaître explicitement la dépendance en h pour simplifier les notations, mais ce que l'on fait réellement ici est considérer une famille de fonctions $(u_h)_{h>0}$ indexée avec h.

Nous allons définir une notion de "front d'onde semiclassique" en faisant intervenir le paramètre h. On va procéder par complémentarité, et définir en premier lieu le complémentaire du front d'onde semiclassique $WF_h(u)$.

Définition 10 (Zéro microlocal)

Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. On dit que (x_0, ξ_0) est un **zéro microlocal de** u si il existe un symbole $\chi(x, \xi) \in S$ non nul en (x_0, ξ_0) vérifiant

$$\left|\left|\chi^W(x,hD)u\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty).$$

On dit aussi que u est microlocalement infiniment petite en (x_0, ξ_0).

Remarque

On remarque tout d'abord que l'ensemble des zéros microlocaux de u est un ouvert : en effet si on peut trouver un symbole χ ne s'annulant pas en (x_0, ξ_0), alors par continuité ce même symbole sera non nul sur un voisinage ouvert V de (x_0, ξ_0). On en déduit alors que tout point de ce voisinage ouvert V est aussi un zéro microlocal de u.

Ensuite, on remarque que l'on peut remplacer χ^W par $\mathrm{Op}_t\chi$ pour n'importe quel $t \in [0,1]$ et obtenir une définition équivalente. D'après le théorème 14, on peut trouver pour tout $t \in [0,1]$ un symbole χ_t vérifiant $\mathrm{Op}_t(\chi_t) = \chi^W$ et l'on peut vérifier que les symboles principaux sont identiques et donc que $||\mathrm{Op}_t(\chi_t)|| = O(h^\infty)$.

Définition 11 (Front d'onde semiclassique)

On appelle **front d'onde semiclassique de** u l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{2n}$ qui ne sont pas des zéros microlocaux de u. On le note $WF_h(u)$.

Il convient de voir le front d'onde semiclassique d'une particule-onde quantique u comme étant l'ensemble des endroits où il est "probable" de trouver u, au sens de la négligeabilité $O(h^\infty)$. Autrement dit, les points où u est microlocalement infiniment petite sont les points (de l'espace de phase) où la particule a "peu de chances" de se trouver. Par ailleurs, si l'on se remémore le principe d'indétemination d'Heisenberg, il apparaît pertinent de travailler ici sur l'espace de phase, car ce principe d'indétemination se prononce à la fois sur la position x et la vitesse ξ (plus précisément l'impulsion ou moment, c'est à dire encore la quantité de mouvement en mécanique classique).

5.2 Ensemble caractéristique et conservation de l'énergie

On reprend les notations précédentes, et on suppose de plus dans cette section que u vérifie l'EDP $Pu = 0$, où $P = p^W$ est la quantification de Weyl d'un symbole $p = p(x,\xi;h) \in S_{2n}(\xi^k)$ de la forme

$$p \sim p_0 + hp_1 + \dots.$$

On appelle respectivement **symbole principal** le symbole p_0 et **symbole sous-principal** le symbole p_1.

Définition 12 (Ensemble caractéristique)

On définit l'**ensemble caractéristique de** p comme étant :

$$p_0^{-1} = \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, p_0(x,\xi) = 0\right\}$$

Moralement, il faut voir le symbole p comme une énergie. Pour le cas de l'équation de Schrödinger par exemple, le symbole associé est $p(x,\xi) = |\xi|^2 + V(x)$. On rappelle que la transformée de Fourier semiclassique $\mathcal{F}_h$ fait apparaître h^1, donc le $\frac{\hbar^2}{2m}$ est "caché" dans le $|\xi|^2$ (on prend m=1). Ainsi, on peut voir la conservation de l'énergie d'une particule quantique comme une condition de la forme "$p =$ cste". Dans la limite semiclassique, où le paramètre h tend vers 0, on s'attache à regarder le comportement du symbole principal p_0. Plus précisément, si on s'intéresse à $p_0^{-1}(\lambda)$ la ligne de niveau λ de p_0, la condition "l'énergie est constante et égale à lambda" est équivalente à

$$(x(t), \xi(t)) \in p_0^{-1}(\lambda) \longleftrightarrow WF_h(u) \subset\in p_0^{-1}(\lambda).$$

En particulier, à un décalage de λ près, on peut s'intéresser à $p_0^{-1}(0)$, l'ensemble caractéristique. C'est dans cette optique que l'on s'intéresse au théorème suivant :

Théorème 10 (Conservation de l'énergie)

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $||u||_{L^2\mathbb{R}^n} \leq 1$. On suppose que u vérifie l'EDP $Pu = 0$, où $P = p^W$ est la quantification de Weyl d'un symbole $p = p(x,\xi;h) \in S_{2n}(\xi^k)$ de symbole principal p_0. Alors

$$WF_h(u) \subset p_0^{-1}(0).$$

Preuve. Soit $(x_0, \xi_0) \notin p_0^{-1}(0)$.

On considère le symbole $\chi(x,\xi) := \xi^{-m} \# p(x,\xi)$. Par composition de deux symboles de S, ce symbole est dans S, et on a de plus

$$\chi(x_0,\xi_0) = \xi_0^{-m} p_0(x_0,\xi_0) + O(h).$$

En particulier, χ ne s'annule pas sur un voisinage de (x_0, ξ_0). De plus, puisque $Pu = p^W u = 0$, on a

$$\chi^W(x, hD)u = (hD)^{-m} \circ p^W u = 0.$$

En particulier, $\chi^W(x,hD)u = O(h^\infty$ et (x_0,ξ_0) est donc un zéro microlocal de u, autrement dit $(x_0,\xi_0) \in (WF_h(u))^c$ $\square$

5.3 Equation de l'évolution temporelle et principe de correspondance de Bohr

On considère toujours $p \in S$ et $P = p^W$. On considère de plus le problème de Cauchy de l'équation de Schrödinger (dépendante du temps)

$$\begin{cases} \dfrac{i}{h}\partial_t(t,x)\psi + P\psi(t,x) & = 0 \\ \psi(0,x) & = \psi_0(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

où l'inconnue ψ est appelée fonction d'onde. Notre objectif dans cette partie est de faire le lien entre la mécanique Hamiltonienne, donc la mécanique classique, et les solutions (quantiques donc) de l'équation de Schrödinger. En particulier, on reprend la notation du système Hamiltonien et on réécrit le système précédent comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \partial_\xi p \\ \dot{\xi}(t) & = -\partial_x p \end{cases} \tag{5.2}$$

Ce système n'est pas sans rappeler le système obtenu via le principe fondamental de la dynamique appliqué à un système mécanique, où ξ jouerait le rôle de la quantité de mouvement et p l'énergie mécanique $\frac{1}{2m}|\xi|^2 + V(x)$. Les notations liés à la mécanique Hamiltonienne désignent la solution du système précédent (5.2) par $e^{tH_p(x(0),\xi(0))}$ où $H_p(x,\xi) = (\partial_\xi p, -\partial_x p) = J \times \partial p$. L'objectif est de montrer l'égalité suivante :

$$WF_h(e^{-itP/h}\psi_0) = e^{tH_p(WF_h(\psi_0)}$$

où $\psi = e^{-itP/h}\psi_0$ désigne la solution de (5.1). Sous réserve de validité, cette égalité stipule que le front d'onde obéit, dans la limite semiclassique, aux lois de la mécanique classique. Ceci illustrerait bien le principe de correspondance de Bohr, qui stipule que les systèmes physiques quantiques présentant des conditions permettant de considérer négligeable la constante de Planck $\hbar$ suivent les lois de la mécanique classique. Cela revient à dire, en résumant grossièrement, que l'on peut retrouver la physique classique en négligeant $\hbar$, ou encore comme on le fait en analyse semiclassique, de considérer $\hbar$ comme un paramètre et de dire que $\hbar \to 0$.

Théorème 11

Sous les hypothèses du théorème précédent, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour toute fonction $\psi_0 \in L^2\mathbb{R}^n)$,

$$WF_h(e^{-itP/h}\psi_0) = e^{tH_p}(WF_h(\psi_0)$$

Pour montrer ceci, on montre tout d'abord le résultat suivant

Théorème 12 (Théorème d'Egorov)

Soit $a(x,\xi) \in S$ et $A := a^W(x,hD)$. Alors la formule

$$B(t) := e^{\frac{i}{h}tP}Ae^{-\frac{i}{h}tP}$$

définit un opérateur pseudo-différentiel semiclassique B vérifiant $B(t) = b^W(t,x,hD)$ où le symbole b est dans S et vérifie

$$b \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t,x,\xi)h^k.$$

De plus, son symbole principal vérifie $b_0(t,x,\xi) = ae^{tH_p(x,\xi)}$.

Preuve du théorème d'Egorov. La preuve, tirée de [**?**], s'appuie sur le théorème de Beals, que nous ferons qu'évoquer ici sans rentrer dans le détail. Pour cette preuve, on se contente d'admettre que si B vérifie une certaine équation différentielle, alors c'est un opérateur pseudo-différentiel semiclassique de symbole $b \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t,x,\xi)h^k \in S$. Pour obtenir cette équation, on dérive tout d'abord $B : t \mapsto B(t)$:

$$\begin{aligned} B'(t) &= \frac{i}{h}\left(PB'(t) - e^{\frac{i}{h}tP}APe^{-\frac{i}{h}tP}\right) \\ &= \frac{i}{h}\left(PB'(t) - B'(t)P\right). \end{aligned}$$

On peut en effet vérifier que si P est un opérateur pseudo-différentiel, alors P commute avec e^P. On obtient, en adoptant la notation $[a,b] = ab - ba$ pour le commutateur de deux réels, $B'(t) = \dfrac{i}{h}[P, B(t)]$. On a de plus $B(0) = A$ par définition. On admet, comme annoncé précédemment, que cela suffit pour décrire B comme un opérateur pseudo-différentiel semiclassique de symbole $b \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t,x,\xi)h^k \in S$.

Il nous reste maintenant à vérifier le dernier point de la preuve portant sur b_0. On remarque tout d'abord que le symbole principal de $B'(t)$ est $\partial_t b_0(t,x,\xi)$. D'autre part, $[P,B]$ vérifie

$$[P,B(t)] = P\circ B(t) - B(t)\circ P = (p\#b - b\#p)^W\,.$$

D'autre part, en utilisant les développements asymptotiques (2.4) obtenus en partie 2, il vient

$$\begin{aligned}
[P,B(t)] &= \left(pb + \frac{h}{2i}\{p,b\} - bp - \frac{h}{2i}\{b,p\} + O(h^2)\right)^W \\
&= \frac{h}{2i}\left(\langle\partial_\xi p,\partial_x b\rangle - \langle\partial_x p,\partial_\xi b\rangle - \langle\partial_\xi b,\partial_x p\rangle + \langle\partial_x b,\partial_\xi p\rangle + O(h^2)\right)^W \\
&= \frac{h}{2i}\left(2\langle\partial_\xi p,\partial_x b\rangle - 2\langle\partial_x p,\partial_\xi b\rangle + O(h^2)\right)^W \\
&= \frac{h}{i}\{p,b\}^W + O(h^2) \\
&= \frac{h}{i}\{p,b_0+O(h)\}^W + O(h^2) \\
&= \frac{h}{i}\{p,b_0\}^W + O(h^2)
\end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant les termes principaux (comme termes uniques d'un développement asymptotique d'une fonction à variables vectorielles et à valeurs réelles), on obtient

$$\partial_t b_0(t,x,\xi) = \frac{h}{i}\{p,b_0\}.$$

De plus, on a $b(0,x,\xi) = a(x,\xi)$ car $B(0) = A$, et A est de symbole principal $a \in S$ (indépendant de h). Ainsi, le problème de Cauchy ici obtenu est un problème faisant intervenir une équation différentielle ordinaire, dont la solution est $b(t,x,\xi) = a(e^{tH_p}(x,\xi))$, ce qui est le résultat annoncé. $\square$

Preuve du théorème (11). On fixe une fonction $\psi_0 \in L(\mathbb{R}^n)$ Tout d'abord, on a par définition d'un zéro microlocal l'équivalence suivante :

$$(x_0,\xi_0) \notin WF_h(e^{-\frac{i}{h}tP}\psi_0) \Longleftrightarrow \exists a\in S, a(x_0,\xi_0)\neq 0, \left|\left|a^W(x,hD)e^{-\frac{i}{h}tP}\psi_0\right|\right| = O(h^\infty).$$

On utilise alors le théorème d'Egorov pour associer à chaque symbole $a \in S$ vérifiant $a(x_0,\xi_0) \neq 0$ un symbole $b \in S$ tel que $b(t,x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t,x,\xi)h^k$ où les b_i sont indépendants de h et $b_0(t,x,\xi) =$

$a(e^{tH_p}(x_0,\xi_0))$ et où $B = b^W$ est comme défini dans le théorème d'Egorov et vérifie donc en particulier

$$Ae^{-\frac{i}{h}tP}\psi_0 = e^{-\frac{i}{h}tP}B\psi_0.$$

Or on remarque que l'opérateur $e^{\frac{i}{h}tP}$ est unitaire (i.e $\left|\left|e^{\frac{i}{h}tP}u\right|\right| = ||u||$ pour tout $u \in S$) et inversible pour la composition, d'inverse $e^{-\frac{i}{h}tP}$. Il vient alors, en gardant les notations b et B (qui dépendent de a) :

$$\begin{aligned}
(x_0,\xi_0) \notin WF_h(e^{-\frac{i}{h}tP}\psi_0) &\Longleftrightarrow \exists a \in S, a(x_0,\xi_0) \neq 0, \left|\left|a^W(x,hD)e^{-\frac{i}{h}tP}\psi_0\right|\right| = O(h^\infty) \\
&\Longleftrightarrow \exists a \in S, a(x_0,\xi_0) \neq 0, \left|\left|e^{-\frac{i}{h}tP}B\psi_0\right|\right| = O(h^\infty) \\
&\Longleftrightarrow \exists a \in S, a(x_0,\xi_0) \neq 0, ||B\psi_0|| = O(h^\infty) \\
&\Longleftrightarrow e^{-\frac{i}{h}tP}(x_0,\xi_0) \notin WF_h(\psi_0).
\end{aligned}$$

On applique ceci à $(x_0,\xi_0) = e^{tH_p}(x,\xi)$. On a $b(t,x,\xi) = a(x_0,\xi_0) + O(h)$ qui est bien non nul pour h suffisamment petit. On utilise là encore le fait que, dans la définition de zéro microlocal, on peut remplacer le symbole χ par un autre symbole (non nul en (x_0,ξ_0)) dont le symbole principal coïncide avec χ. Ici, le symbole b associé à a dans nos calculs vérifie $b_0(t,x,\xi) = a(e^{tH_p}(x_0,\xi_0))$ donc on a, avec le (x_0,ξ_0) choisi :

$$\begin{aligned}
(x_0,\xi_0) \notin WF_h(e^{-\frac{i}{h}tP}\psi_0) &\Longleftrightarrow \exists a \in S, [a \circ e^{-tH_p}](x_0,\xi_0) \neq 0, ||B\psi_0|| = O(h^\infty) \\
&\Longleftrightarrow \exists b \in S, b(x_0,\xi_0) \neq 0, \left|\left|b^W\psi_0\right|\right| = O(h^\infty) \\
&\Longleftrightarrow (x_0,\xi_0) \notin WF_h(\psi_0).
\end{aligned}$$

En remplaçant (x_0,ξ_0) par $e^{tH_p}(x,\xi)$ comme annoncé, on obtient

$$e^{tH_p}(x,\xi) \notin WF_h(e^{-\frac{i}{h}tP}\psi_0) \Longleftrightarrow (x,\xi) \notin WF_h(\psi_0)$$

soit le résultat attendu. $\square$

Annexes

A Résultats d'analyse de Fourier semiclassique et d'analyse spectrale

Proposition 8 (Propriétés de base)

On considère des fonctions dans $\mathscr{S}$. On a

- $\varphi(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x,\xi\rangle} \mathcal{F}_h\varphi(\xi) d\xi$ (inversion de Fourier).
  On dira aussi de manière équivalente que la distribution tempérée $\delta_{\{y=x\}} = \dfrac{1}{(2\pi h)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle} d\xi$ vérifie
  $$\langle \delta_{\{y=x\}}, \varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \varphi.$$
- $(hD_\xi)^\alpha(\hat{\varphi}) = \mathcal{F}_h((-x)^\alpha\varphi)$
- $\mathcal{F}_h((hD_x)^\alpha\varphi) = \xi^\alpha \mathcal{F}_h\varphi$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_h(\varphi)\psi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_h(\psi)\varphi$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\bar{\psi} = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_h(\varphi)\overline{\mathcal{F}_h(\psi)}$

Proposition 9 (Estimées)

On considère ici la transformée de Fourier classique ($h = 1$). On a

- $\|\hat{\varphi}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^1}$
- $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq \dfrac{1}{2\pi^n}\|\hat{\varphi}\|_{L^1}$
- Il existe $C > 0$ telle que : $\|\hat{\varphi}\|_{L^1} \leq C \sup\limits_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial^\alpha\varphi\|_{L^1}$

Proposition 10 (Transformation sur une exponentielle quadratique imaginaire)

Soit Q une matrice réelle symétrique et inversible. Alors :

$$\mathcal{F}\left(e^{\frac{i}{2}\langle Qx,x\rangle}\right) = \frac{(2\pi)^{n/2} e^{\frac{i\pi}{4} sgn(Q)}}{|\det Q|^{1/2}} e^{-\frac{i}{2}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}$$

Théorème 13 (Spectre d'opérateurs auto-adjoints)

Soit $A : H \to H$ est un opérateur auto-adjoint borné sur un Hilbert H. On note $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, A - \lambda I \text{ non inversible}\}$ son spectre. Alors on a les deux résultats suivants :

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, $(A - \lambda I)^{-1}$ est défini et est un opérateur linéaire borné sur H.
- Si $\sigma(A) \subset [a, +\infty[$, alors
$$\forall u \in H,\, \langle Au, u\rangle \geq a\, ||u||_H^2\,.$$

B Résultats d'analyse semiclassique

Théorème 14 (Changement de quantifications)

Si l'on note $A := \mathrm{Op}_t(a_t)$ pour un $t \in [0,1]$, alors pour tout $s \in [0,1]$

$$a_t(x,\xi) = e^{i(t-s)h\langle D_x, D_\xi\rangle} a_s(x,\xi).$$

Autrement dit, pour tout symbole a_t, il existe un symbole a_s vérifiant $\mathrm{Op}_t(a_t) = \mathrm{Op}_s(a_s)$.

Le résultat suivant concerne les opérateurs pseudo-différentiels semiclassiques dans L^2.

Théorème 15 (Calderón - Vaillancourt)

Si a est un symbole de $S = S(1)$, alors l'opérateur $a^W(x,hD) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur borné, et on a l'estimation

$$||a^w(x,hD)||_{L^2 \to L^2} \leq C \sum_{\alpha \leq Mn} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha a|$$

, où M est une constante indépendante de a. Si on a de plus $a \in S_\delta$ pour un $0 \leq \delta \leq \dfrac{1}{2}$, alors

$$\left|\left|a^W(x,hD)\right|\right|_{L^2 \to L^2} \leq C \sum_{\alpha \leq Mn} h^{\frac{|\alpha|}{2}} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha a|.$$