Ecole Normale Supérieure de Rennes & Université de Rennes 1

Mémoire de stage de master 2

Propagation des singularités en analyse semiclassique

Vincent LOUATRON

encadré par
Setsuro FUJIIE

professeur à l'université de Ritsumeikan （立命館大学）

Avec le soutien de la Fondation Rennes 1

1er juillet 2024

Introduction

Au fil des découvertes scientifiques du XXᵉ siècle, la compréhension des mécanismes de la physique quantique s'est révélée être d'un grand intérêt pratique. Les découvertes ne furent pas seulement physiques et mathématiques, mais aussi chimiques (modèle quantique de l'atome), informatiques (effet tunnel et limitation de la finesse de gravure des processeurs), *et caetra*. Il est également apparu que la physique quantique pouvait, dans une certaine mesure, être reliée à la physique classique. Un des principes permettant d'effectuer ce lien est le principe dit de correspondance énoncé par Niels Bohr en 1920. Ce principe stipule que les systèmes physiques quantiques, sous de bonnes hypothèses [1], suivent des lois proches de celles de la mécanique classique. En des termes grossiers, la physique classique peut être vue comme une approximation de la physique quantique. On retrouve cette idée de considérer la *constante* de Planck comme une *variable* en analyse semiclassique, où on travaille avec un paramètre h voué à tendre vers 0.

Ce mémoire fait suite à un rapport [Lou20] rédigé à l'occasion du stage de M1 que j'ai effectué en distanciel en 2020 avec monsieur Setsuro Fujiie (藤家雪朗), chercheur et professeur à l'université de Ritsumeikan, Kusatsu [2]. Il s'appuie largement sur le livre de Maciej Zworski [Zwo04] et les résultats qui y figurent proviennent tous de ce livre. Je tiens à préciser que ce simple rapport de stage n'a en aucun cas la prétention de se placer à la hauteur des ouvrages édifiants consitutant le reste de la biliographie de ce mémoire (en particulier le livre de M.Zworski). Cependant les résultats y sont en nombre restreint et prouvés avec plus (voire trop) de détails comparés aux ouvrages classiques ce qui, je l'espère, en facilite la lecture. Pour cette raison, il y sera fait référence dans la suite. Il convient enfin de noter que ce rapport, bien qu'il ait fait l'objet de relectures, n'a pas été soumis aux évaluations scolaires usuelles d'un rapport de stage de master 1 à cause du contexte sanitaire (CoViD-19).

Ce stage m'avait permis de découvrir les bases de l'analyse microlocale et semiclassique et présentait quelques interprétations physiques, notamment autour du principe de correspondance de Bohr. Ce principe permettait d'interpréter le théorème final du rapport, qui est une version du théorème de propagation des singularités semiclassiques. Notre but dans ce présent mémoire est maintenant de généraliser ce théorème. L'objectif est donc de synthétiser la preuve (ou au moins une partie) de ce théorème, ce qui implique la présentation d'un certain nombre de notions, notamment de géométrie différentielle et symplectique et d'analyse semiclassique. La preuve proposée dans ce qui suit s'appuie largement sur la preuve donnée dans le chapitre 12 de [Zwo04].

Concrètement, ce mémoire se donne pour but de fournir un maximum de détails concernant le théorème de propagation des singularités. Dans une première partie, nous nous attacherons à placer ce théorème dans un minimum de contexte mathématique et physique. Nous en donnerons un premier aperçu, ce qui nous permettra d'en appréhender les difficultés, les points clés, et ainsi de définir les objectifs des parties qui suivent. En effet, le théorème de propagation se place dans un contexte à cheval entre l'analyse semiclassique (lié à la physique quantique) d'un côté, et la

1. Plus précisément, il s'agit des systèmes physiques quantiques dont les conditions et le contexte permettant de considérer "négligeable" la constante de Max Planck $\hbar$ devant les autres grandeurs physiques en jeu.

2. On trouvera ledit rapport à cette adresse.

géométrie symplectique (lié à la mécanique classique) de l'autre. C'est pourquoi l'objectif de la seconde partie sera de présenter des résultats purement classiques. L'enjeu dans la partie suivante sera alors de faire le lien entre classique et quantique, ou dans un vocabulaire plus mathématique, entre symboles et opérateurs. Nous pourrons alors compléter, à la lumière de ces résultats, l'aperçu initial du théorème de propagation.

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mon tuteur de stage, monsieur Setsuro Fujiie, qui m'a beaucoup aidé tant sur le plan intellectuel que matériel et avec qui j'envisage avec enthousiasme un projet de thèse.

Je remercie aussi Kenta Higuchi （樋口健太）, Kouichi Taira（平良晃一）et Naoya Yoshida（吉田尚矢）pour m'avoir donné des conseils utiles. Le séminaire portant sur le livre de Zworski que je suis actuellement avec eux me permet d'accélérer mon apprentissage en analyse semiclassique. Merci également au professeur émérite Hiroshi Isozaki （磯崎洋）pour m'avoir accepté dans son cours sur les EDP et les problèmes inverses.

Merci enfin à la fondation Rennes 1 et ses mécènes qui m'ont apporté un soutien financier bienvenu pour ce stage non rémunéré.

Notations

Fonctions, dérivées

- Crochet japonais : $\langle\cdot\rangle : x \in \mathbb{R}^p \mapsto \langle x\rangle := \sqrt{(1+\|x\|^2)}$.
- Produit scalaire sur $\mathbb{R}^p$: $\langle\cdot,\cdot\rangle$
- Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$
  - $\partial f(x)$ désigne la jacobienne de f et $df(x)$ sa différentielle en $x \in \mathbb{R}^p$.
  - Dans le cas $p = 2n$ et $q = 1$, on note $\partial_{x_j} f$ les n premières et $\partial_{\xi_j} f$ les n dernières dérivées partielles de $f : (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto f(x, \xi)$.
- Si $x : t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)$ dépend du temps, on note $\dot{x}$ ou $\partial_t x$ sa dérivée par rapport au temps.
- On note $D_{x_j} = \dfrac{1}{i}\partial_{x_j}$ et $D_x = (D_{x_j})_{1\le j\le p}$. De même, $D_t = \dfrac{1}{i}\partial_t$.
- Dans tout l'exposé et sauf mention contraire, "la transformée de Fourier" d'une fonction $f : y \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ désignera sa transformée de Fourier *semiclassique* (à paramètre $h > 0$)

$$\mathcal{F}_h(f)(\eta) := \int_{\mathbb{R}^p} e^{-\frac{i}{h}\langle y,\eta\rangle} f(y)dy.$$

- Si f est une application d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ à valeurs réelles, on notera $f = O(h^\infty)$ lorsque $\|f\| = O_{h\to 0}\left(h^N\right)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Ensembles de matrices

On désigne par n un entier naturel non nul.

- Ensembles de matrices à coefficients réels : on note
  - $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ les matrices symétriques et $\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ les matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
  - $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
  - $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ les matrices symplectiques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
- Ensembles de matrices à coefficients complexes : on note
  - $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ les matrices hermitiennes et $\mathscr{A}\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ les matrices antihermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
  - $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ les matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Autres notations et remarques

- Selon le contexte, on parlera de "champ de vecteurs" tantôt pour désigner une application lisse de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$ qui à chaque point de $\mathbb{R}^p$ associe un vecteur de $\mathbb{R}^q$, tantôt pour désigner une application $X : \mathbb{R}^p \to (\mathbb{R}^q)^*$ qui à chaque point de $\mathbb{R}^p$ associe une forme linéaire de $\mathbb{R}^q$ (c'est à dire une $1-$forme différentielle. On veillera à ce qu'il n'y ait pas d'ambiguïté.

Table des matières

1 Notations, définitions et énoncé du théorème de propagation des singularités

1.1 Mécanique hamiltonienne

La mécanique hamiltonienne a été formalisée au début du XIX^e siècle, et son élaboration a dans un premier temps permis une reformulation édifiante de la mécanique classique newtonienne. Un des intérêts du point de vue hamiltonien est son aspect géométrique. Au lieu de considérer la trajectoire d'une particule de position $x(t)$, on considère le couple $(x(t), \xi(t))$ où $\xi(t)$ est la quantité de mouvement (ou impulsion) de la particule. Si $x \in \mathbb{R}^n$ on appelle $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ l'**espace des phases** associé à la particule ou au système considéré.

Définition 1

Soit $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. On appelle **champ de vecteurs hamiltonien** ou **hamiltonien** [a] associé à p le champ de vecteurs

$$H_p(x, \xi) := \begin{pmatrix} \partial_\xi p \\ -\partial_x p \end{pmatrix}$$

On appelle **équation hamiltonienne** toute équation de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} = H_p(x(t), \xi(t)). \tag{1.1}$$

On note $(x(t), \xi(t)) =: e^{tH_p}(x_0, \xi_0)$ la solution d'une telle équation avec condition initiale $(x(0)\xi(0)) = (x_0, \xi_0)$. En l'occurence $e^{tH_p}(x_0, \xi_0)$ est le flot de cette équation.

a. on aura une définition plus intrinsèque dans la suite.

Exemple. *L'équation du mouvement d'un ressort se déplaçant sans frottement sur un axe horizontal est*

$$m\ddot{x} - kx^2 = 0.$$

On peut la reformuler en l'équation hamiltonienne

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi(t)}{m} \\ -kx(t) \end{pmatrix} = H_p(x(t), \xi(t)) \tag{1.2}$$

avec $p(x, \xi) = \dfrac{1}{2}kx^2 + \dfrac{1}{2m}\xi^2$*. On reconnaît l'énergie potentielle du ressort à gauche et l'énergie cinétique de la masse* m *à droite. On remarque ainsi que* p *est l'énergie mécanique du système.*

On peut retrouver la propriété de conservation de l'énergie dans l'exemple précédent, mais aussi de manière plus générale :

Proposition 1 (Conservation de l'énergie)

L'énergie p d'une équation hamiltonienne est conservée le long de la trajectoire $(x(t), \xi(t))$ dans l'espace des phases :

$$\frac{d}{dt}p(x(t), \xi(t)) = 0.$$

Preuve. $\frac{d}{dt}p(x(t), \xi(t)) = \dot{x}\partial_x p + \dot{\xi}\partial_\xi p = \dot{x}\dot{\xi} - \dot{\xi}\dot{x} = 0.$ $\square$

En dimension 1, on peut décrire aisément la surface d'énergie constante $\{p = 0\}$: c'est une conique contenant le point $(x(0), \xi(0))$. Le cas de la dimension 1 est en fait explicite car la trajectoire $\{(x(t), \xi(t)), t \in \mathbb{R}\}$ est exactement la sous-variété $\{p = 0\}$. En dimension supérieure, la trajectoire est contenue, mais non égale, à cette hypersurface. La trajectoire est en effet de dimension 1 et l'hypersurface de dimension $2n - 1$. Une bonne manière de considérer l'aspect géométrique de la trajectoire et des surfaces d'énergie de systèmes hamiltoniens est la géométrie symplectique.

On peut ainsi apprécier l'intérêt de la formulation hamiltonienne en mécanique classique. Ce dont William Hamilton ne se doutait peut-être pas cependant, c'est que la formulation qu'il proposa serait également utile en mécanique quantique au siècle suivant !

1.2 Symboles et opérateurs pseudo-différentiels

On pose le cadre requis pour la lecture de ce rapport en ce qui concerne les opérateurs pseudo-différentiels. Comme précédemment, on se place dans l'espace des phases $\mathbb{R}^{2n}$, et on note $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ les coordonnées.

Définition 2

Soit $m : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable. On dit que m est une **fonction d'ordre** s'il existe une constante $C > 0$ et un $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$x, y \in \mathbb{R}^{2n}, m(x) \leq C\langle x - y\rangle^N m(y). \tag{1.3}$$

Exemples. *Les constantes, et plus généralement les fonctions* $x \mapsto \langle x\rangle^a$ *avec* $a \in \mathbb{R}$. *Voir [Lou20].*

Définition 3 (Classes de symboles)

Soit m une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^{2n}$. On appelle **classe de symboles** associée à m et on note $S(m)$ l'ensemble des fonctions $a = a(x, \xi, h) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ vérifiant

$$\exists h_0 > 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \exists C_\alpha > 0 \ ; \ \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \forall 0 < h \leq h_0, |\partial^\alpha a| (x, \xi, h) \leq C_\alpha m(x, \xi)$$

La définition de $S(m)$ n'est pas sans rappeler la définition de l'espace de Schwartz. On remarque d'ailleurs que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} S(\langle x,\xi\rangle^{-k}) = \mathscr{S}$. On peut aussi montrer que $\mathscr{S}$ est dense dans $S(m)$ pour la topologie donnée par les semi-normes $N_\alpha(a) := \left\|\frac{1}{m}\partial^\alpha a\right\|_\infty$ indexées par $\alpha \in \mathbb{N}^n$

Remarque

Pour $m = 1$ on note $S := S(1)$. C'est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui on toutes leurs dérivées bornées.

Proposition 2

Soient m_1, m_2 deux fonctions d'ordre. Alors m_1^{-1} et m_1m_2 sont aussi des fonctions d'ordre, et pour toutes fonctions $a \in S(m_1)$ et $b \in S(m_2)$ on a $ab \in S(m_1m_2)$.

Preuve. Voir [Lou20] pour l'inverse et le produit de fonctions d'ordre. Pour l'inverse et le produit de symboles, on remarque grâce à la formule de Leibniz que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha(ab) = \sum_{\beta\leq\alpha} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} b$$

et donc

$$N_\alpha(ab) \leq C m_1 m_2$$

d'où $ab \in S(m_1m_2)$. □

On peut également montrer un résultat proche de "si $\frac{1}{a}$ est défini alors il est dans $S(m_1^{-1})$". Ce résultat est faux, mais moyennant une condition d'ellipticité de la forme

$$\exists c > 0,\ a \geq cm$$

alors le résultat devient vrai. On peut consulter [Lou20], section 3.1, pour une preuve. On pourra aussi consulter [Zwo04] pour plus de résultats sur les symboles et opérateurs elliptiques et l'inversion d'opérateurs.

Remarque

Revenons un instant sur la définition de $S(m)$. Comme cela apparaît dans la définition, les symboles peuvent tout à fait dépendre de h. On peut en fait définir des classes de symboles qui permettent de choisir l'ordre de décroissance en h. (c.f [Zwo04] section 4.4 et [Lou20] section 3.1).

Dans la pratique, on travaille effectivement avec des dépendances en h, mais pas n'importe lesquelles. Pour simplifier les choses, on écrit souvent les symboles sous la forme de ce qu'on appelle un **développement asymptotique** en h :

Définition 4

Soit m une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^{2n}$ et $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de symboles de $S(m)$. On dit que $a \in S(m)$ est **asymptotique** à $\sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$, et on note $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$ si :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \left| a - \sum_{j=0}^{N-1} h^j a_j \right| = O_{S(m)}(h^N) \tag{1.4}$$

où la notation $O_{S(m)}(h^N)$ signifie que pour chaque multi-indice α, il existe $C_{\alpha,N}$ tel que

$$\left| \partial^\alpha \left(a - \sum_{j=0}^{N-1} h^j a_j \right) \right| \leq C_{\alpha,N} h^N m.$$

Enfin, on appelle dans ce cas **symbole principal de** a le symbole a_0.

Plusieurs choses justifient l'introduction de cette écriture, la première étant que beaucoup de théorèmes (dont le théorème de propagation des singularités) peuvent donner un résultat en ne prenant en considération que le symbole principal de a. Une autre chose est que l'on peut, avec le théorème de Borel (c.f [Zwo04] section 4.4.2 et [Lou20] section 3.2), créer un symbole avec une suite de symboles a_j via l'écriture $\sum_{j=0}^{+\infty} h^j a_j$.

Maintenant que nous avons défini les symboles, nous pouvons définir une manière de leur associer des opérateurs. Un des cas les plus simples est le cas des opérateurs différentiels et de la transformée de Fourier. En effet, une des propriétés bien connues de la transformée de Fourier est qu'elle transforme multiplication en dérivation, et vice-versa. Si on reprend par exemple un opérateur hamiltonien $p(x,\xi) = x^2 + \xi^2$ comme dans la partie précédente, on peut lui associer par transformée de Fourier (classique) en la variable ξ l'opérateur différentiel $H = x^2 + \partial_x^2$, aussi appelé champ de vecteurs hamiltonien. Dans notre cadre (transformée de Fourier semiclassique $\mathcal{F}_h$), il serait donc naturel de vouloir "associer" d'une certaine manière à toute fonction $a(x,\xi) = \sum_{\alpha \leq p} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ l'opérateur différentiel

$$A = \sum_{\alpha \leq p} a_\alpha(x)(hD)^\alpha.$$

On appelle une telle opération la **quantification** du symbole a. La quantification avec laquelle nous travaillons ici est la quantification dite de Weyl. Elle fournit un opérateur qui n'est pas polynômial comme les opérateurs différentiels ; on appelle ces opérateurs des **opérateurs pseudo-différentiels**.

Définition 5 (Quantification de Weyl)

Soit $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On appelle **quantification de Weyl** de a, et on note $a^W(x, hD)$, l'opérateur linéaire défini pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ par

$$\left[a^W(x, hD)\right](u)(x) := \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi\rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Une des propriétés de cette quantification est que, dans le cas d'un symbole polynômial en ξ le résultat est le même que la quantification décrite pour les opérateurs différentiels.

Comme pour les symboles, on donne pour les opérateurs pseudo-différentiels une terminologie liée au symbole principal.

Définition 6

On dit d'un opérateur pseudo-différentiel $P = p^W(x, hD)$ avec $p(x, \xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, \xi) h^k$ qu'il est de **type principal réel** en un point (x_0, ξ_0) lorsque son symbole principal p_0 est à valeurs réelles et vérifie

$$p_0(x_0, \xi_0) = 0, \ \partial p_0(x_0, \xi_0) \neq 0.$$

On a précédemment défini la quantification de Weyl sur la classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Cependant on peut étendre cette quantification à un cadre plus général à savoir le cadre $L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

Proposition 3 (Théorème de Calderón-Vaillancourt)

Pour tout $a \in S$, $a^W(x, hD)$ est un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. En particulier il existe deux constantes $C > 0$ et $M \in \mathbb{N}^*$ indépendantes de a telle que

$$\|A\|_{L^2 \to L^2} \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} |\partial^\alpha a|$$

Preuve. On pourra se référer à la preuve de la section 4.5.2 de [Zwo04]. □

Ce fait, bien que clairement non trivial, sera utilisé abondamment par la suite. En particulier, on fera souvent l'analogie entre $O_S(h^N)$ et $O_{L^2 \to L^2}(h^N)$. Plus précisément :

Lemme 1

Soient $N \in \mathbb{N}$, $a \in S$ et $A = a^W(x, hD)$. Si $a = O_S(h^N)$ alors $A = O_{L^2 \to L^2}(h^N)$.

Preuve. On rappelle que $a = O_S(h^N)$ signifie que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que

$$|\partial^\alpha a| \leq C_\alpha h^N.$$

En particulier si on reprend la constante M donnée par le théorème précédent, on voit que l'on peut se contenter de majorer les $|\partial^\alpha a|$ pour $[\alpha| \leq M$. On obtient donc $C' > 0$ telle que

$$\|A\|_{L^2 \to L^2} \leq C' h^N.$$

$\square$

Le théorème de Calderón-Vaillancourt permet de parler de l'adjoint de a^W en tant qu'opérateur borné de L^2. On a d'ailleurs le résultat suivant :

Proposition 4

Soit $a \in S$ à valeurs réelles. Alors $a^W(x, hD)$ est auto-adjoint.

Remarque

On remarque que ce résultat ne comprend pas le cas de l'opérateur de Schrödinger $P(x, hD) = \Delta + V(x)$, quantifié de $p(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x)$ où $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. En effet $p \in S(\langle \xi \rangle^2) \setminus S$ (pas borné en ξ). Cependant, l'opérateur de Schrödinger est bel et bien auto-adjoint, et l'on peut adapter cette proposition[2] de manière à pouvoir lui appliquer le théorème de propagation des singularités.

Un autre résultat important est celui concernant la composition d'opérateurs pseudo-différentiels. En effet, on peut montrer que la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels reste un opérateur pseudo-différentiel. De plus, on peut obtenir une expression explicite intégrale du symbole de la composition. On trouvera ces formules dans [Zwo04], théorème 4.18. On ne consigne ici que les premiers termes (ceux utilisés dans ce rapport).

2. Par exemple, une hypothèse d'ellipticité (en un sens à préciser) peut permettre d'assouplir l'hypothèse $a \in S$ en $a \in S(m)$ avec m fonction d'ordre quelconque.

Proposition 5 (Composition d'opérateurs pseudo-différentiels)

Soient $(a,b) \in S(m_1) \times S(m_2)$ deux symboles. Alors il existe un symbole de S noté $a\#b \in S(m_1 m_2)$ tel que :

$$a^W(x,hD) \circ b^W(x,hD) = a\#b^W(x,hD).$$

De plus,

$$a\#b = ab + \frac{h}{2i}\{a,b\} + O_{S(m_1 m_2)}(h^2)$$

et

$$\left[a^W(x,hD), b^W(x,hD)\right] = \frac{h}{i}\{a,b\}^W(x,hD) + O_{L^2 \to L^2}(h^3).$$

En particulier on a, pour la composition,

$$a^W(x,hD)b^W(x,hD) = (ab)^W(x,hD) + \frac{h}{2i}\{a,b\}^W(x,hD) + O_{L^2 \to L^2}(h^2).fx$$

L'important est de retenir que $a\#b \simeq ab$ à un $O(h)$ près. C'est de cela qu'on déduit que le commutateur de a^W et b^W, qui fait intervenir $ab - ba$ à l'ordre 0, est un $O(h)$. Ce $O(h)$ que l'on gagne en prenant le commutateur sera utile pour faire avancer certains raisonnements par récurrence dans la suite, notamment dans la preuve du théorème 4 d'Egorov.

Le théorème de propagation des singularités est un théorème **(micro)local**, c'est pourquoi nous avons besoin d'introduire un peu de terminologie en ce sens.

Remarque

On pourra trouver une terminologie plus exhaustive dans la section 8.4 de [Zwo04]. Dans une optique de simplification, on s'affranchit dans ce mémoire d'un certain nombre de notions. En particulier on omettra les espaces de Sobolev généralisés, qui sont un des outils permettant d'appliquer le théorème de propagation à l'opérateur de Schrödinger (voir remarque suivant la proposition 4).

On présente d'abord la notion de "microlocalement petit" pour une fonction, liée à la notion de front d'onde.

Définition 7 (Front d'onde semiclassique)

Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. On dit que u est **microlocalement petit en** (x_0, ξ_0) s'il existe un symbole $\chi(x, \xi) \in S$ elliptique en (x_0, ξ_0) (c'est à dire qu'il y a une constante $c > 0$ indépendante de h telle que $|\chi(x_0, \xi_0)| > c$) vérifiant

$$\left\|\chi^W(x, hD)u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty).$$

On appelle **front d'onde semiclassique de** u et on note $WF_h(u)$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{2n}$ où u **n'est pas** microlocalement petit.

En ce qui concerne l'interprétation physique de ce front d'onde semiclassique, on peut se le représenter comme l'ensemble où u est "localisé", au sens de la définition (en particulier, c'est une localisation asymptotique en $h \to 0$).

Remarque

On peut donner une définition équivalente en se servant de l'expression de la transformée de Weyl comme des transformées de Fourier. On vérifie en effet que u est microlocalement petit en (x_0, ξ_0) si et seulement s'il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in S$ telles que $\varphi(x_0) = 1$, $\psi(\xi_0) = 1$ et

$$\|\psi \mathcal{F}_h(\varphi u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty).$$

Une propriété importante du front d'onde est son comportement sous l'action d'un opérateur pseudo-différentiel :

Proposition 6

Soit $p \in S$ et $P = p^W(x, hD)$. Alors pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$WF_h(Pu) \subset WF_h(u).$$

On trouvera le vocabulaire et les résultats nécessaires à la preuve de cette propriété dans le chapitre 8 de [Zwo04].

Enfin, on propose une notion de "microlocalement petit", en l'occurence microlocalement proche, pour deux opérateurs pseudo-différentiels.

Définition 8

Soient m_1, m_2 deux fonctions d'ordres, $p \in S(m_1)$ et $q \in S(m_2)$ deux symboles et $P = p^W$ et $Q = q^W$ deux opérateurs pseudo-différentiels. On dit que P et Q sont **microlocalement proches** au voisinage d'un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$, et on note "$T \equiv S$ microlocalement en (x_0, ξ_0)" lorsque qu'il existe un voisinage U de (x_0, ξ_0) tel que

$$\forall (x, \xi) \in U, |p(x, \xi) - q(x, \xi)| = O(h^\infty).$$

Par extension on dira que $P \equiv Q$ microlocalement sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ lorsque la définition précédente vaut pour tout point de U.

1.3 Énoncé du théorème

Nous avons désormais tout le vocabulaire nécessaire pour énoncer le théorème principal de ce mémoire, le théorème de propagation des singularités semiclassiques. En substance, ce théorème permet de faire un lien entre évolution classique (via le hamiltonien classique, voir première section de ce mémoire) et évolution quantique (c'est à dire évolution donnée par des quantifications de symboles). On peut, en termes grossiers, résumer cela ainsi :

Sous de bonnes hypothèses sur p, lorsque u est microlocalement petit en (x_0, ξ_0) alors $p^W(x, hD)u$ est microlocalement petit en $(x(t), \xi(t)) = e^{tH_p}(x_0, \xi_0)$.

L'énoncé est comme suit :

Théorème 1 (Propagation des singularités)

Soit m une fonction d'ordre et $p \in S$. On note $P = p^W(x, hD_x)$. Soit $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ tels que $p(x, \xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} h^k p_k(x, \xi)$. On suppose que p est de type principal réel. On suppose également que ∂p ne s'annule jamais sur $\{p = 0\}$. Soient $u = \{u(h)\}_{0<h<1} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ et $f = \{f(h)\}_{0<h<1} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\forall h \in]0, 1[, \ P(x, hD_x)u(h) = f(h).$$

Alors $WF_h(u) \setminus WF_h(f)$ est invariant sous l'action du flot hamiltonien e^{tH_p} de p.
Plus précisément, si $(x_0, \xi_0) \in WF_h(u) \setminus WF_h(f)$ et si $\exp(tH_p)(x_0, \xi_0) \notin WF_h(f)$ pour tout $t \in (a, b)$ avec $a < 0 < b$ alors $\exp(tH_p)(x_0, \xi_0) \in WF_h(u)$ pour tout $t \in (a, b)$.

Preuve. Soit $(x_0, \xi_0) \in WF_h(u)$ tel que $\exp(tH_p)(x_0, \xi_0) \notin WF_h(f)$ pour $t \in (a, b)$. Montrons que l'ensemble

$$G := \{t \in (a, b), \exp(tH_p)(x_0, \xi_0) \in WF_h(u)\}$$

est à la fois ouvert et fermé dans (a,b). Par connexité cela montrera bien le résultat annoncé.
Etape 1 : G est fermé. En effet, $G=\phi^{-1}(WF_h(u))$ avec $\phi : t\mapsto \exp(tH_p)(x_0,\xi_0)$ et

1. $t\mapsto \phi(t)$ est continue (en fait dérivable) comme flot d'une équation différentielle d'ordre 1 en temps.
2. $WF_h(u)^c$ est ouvert : Supposons que l'on puisse trouver deux fonctions à support compact φ et ψ valant 1 respectivement en $x^*\in\mathbb{R}^n$ et en $\xi^*\in\mathbb{R}^n$ telles que $\|\psi\mathcal{F}_h(\varphi u)\|_{L^2}=O(h^\infty)$. Alors, pour tout point (x,ξ) proche de (x^*,ξ^*) et par continuité de φ et ψ, on a $\phi(x)>0$ et $\psi(\xi)>0$. A (x,ξ) on peut donc, quitte à multiplier ces deux fonctions par une constante, supposer $\varphi(x)=1$ et $\psi(\xi)=1$. On a donc bien $(x,\xi)\in WF_h(u)^c$ pour (x,ξ) proche de (x^*,ξ^*).

Etape 2 : Formes normales. Cette étape, nettement moins triviale, demande un travail plus conséquent que les deux autres et qui constitue d'ailleurs l'objectif de la suite de ce mémoire. Le pilier de cette étape est un théorème de formes normales, qui permet de se ramener au cas où l'opérateur P est hD_{x_1}. On suppose pour l'instant cette étape vérifiée.
Etape 3 : cas $P=hD_{x_1}$ et conclusion. On note ici les vecteurs de $\mathbb{R}^{2n}$ sous la forme (x_1,x',ξ_1,ξ') où $x_1,\xi_1\in\mathbb{R}$ et $x',\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$. Montrons que si $(0,0,0,0)\in WF_h(v)\setminus WF_h(hD_{x_1}v)$, alors les $(t,0,0,0)$ sont aussi dans $WF_h(v)$ pour t suffisamment petit.
On se place dans ce cas de figure. Par définition, il existe $\chi\in S$ elliptique en $0_{\mathbb{R}^{2n}}$ tel que

$$\left\|\chi^W(x,hD_x)\,(D_{x_1}v)\right\|_{L^2}=O(h^\infty).$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0,x_1]$, on a

$$v(x_1,x')=v(0,x')+\int_0^{x_1}\partial_{x_1}v(y,x')dy.$$

On a donc, dans un voisinage de $0_{\mathbb{R}^{2n}}$,

$$v(x_1,x')=v(0,x')+O_{L^2}(h^\infty)$$

au sens où $\left\|\chi^W(x,hD_x)\,(v(x_1,x')-v(0,x'))\right\|_{L^2}=O(h^\infty)$.

Supposons par l'absurde que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $|t|\leq\varepsilon$ tel que $(t,0,0,0)\notin WF_h(v)$. Il existe alors $a\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $a(t,0,0,0)\neq 0$ et

$$a^W(x,hD)v=O_{L^2}(h^\infty).$$

Ainsi, en prenant $|t|$ suffisamment petit et en posant $b(x,\xi):=a(x_1+t,x',\xi_1,\xi')$ on a $b\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subset S(1)$ tel que

$$\begin{aligned}b^W(x,hD)v&=U_ta^W(x,hD)U_{-t}v\\&=U_ta^W(x,hD)(v(0,x')+O_{L^2}(h^\infty))\\&=U_t(v(0,x')+O_{L^2}(h^\infty))\\&=O_{L^2}(h^\infty)\end{aligned}$$

où $U_t:\varphi\mapsto\varphi(x_1+t,x)$. Ainsi, v est microlocalement petite en $(0,0,0,0)$ et donc $(0,0,0,0)\notin WF_h(v)$. Cela rentre en contradiction avec l'hypothèse de départ.
Ainsi, cela montre que G est ouvert et donc le théorème est prouvé (sous réserve de validité de l'étape 2). □

1.4 Un exemple concret : l'oscillateur harmonique en dimension 2

Avant de nous aventurer plus loin dans la preuve du théorème de propagation des singularités, on se propose de construire l'artifice qui nous permet de passer d'un opérateur P à l'opérateur hD_{x_1} comme annoncé précédemment, et ceci de manière explicite dans la mesure du possible [3]. De cette manière, l'on pourra aborder cette étape 2 (théorème des formes normales) tout en gardant cet exemple en tête. Notre but est donc de voir à quel point nous pouvons rendre cette étape 2 explicite, et dans quelle mesure nous aurons besoin des résultats plus forts qui seront énoncés par la suite.

Cadre

On se place en dimension 2 ($n = 1$), et on se donne un symbole p linéaire et l'opérateur P associé via la quantification de Weyl :

$$p(x,\xi) := x^*x + \xi^*\xi \text{ et } P = p^W(x, hD_x) = x^*x + \xi^* D_x$$

Objectifs :

- Trouver une matrice K de déterminant 1 [4] telle que $(p \circ K)(x,\xi) = \xi$,
- Proposer un opérateur T tel que $T^{-1}PT = hD_x$ ainsi qu'un calcul explicite dans un cas particulier.

Hypothèse supplémentaire :

On fait une hypothèse simplificatrice, qui sera utile en particulier dans la recherche de T. On montrera l'existence de K dans un cadre général, mais pour le second objectif on supposera qu'il existe une matrice symétrique $S \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $K = e^{JS}$.

Etape 1 : Trouver K.

On souhaite transformer le symbole linéaire $p(x,\xi) = x^*x + \xi^*\xi$ en le symbole, lui aussi linéaire, $\tilde{p}(x,\xi) = \xi$ via une transformation symplectique K. Comme on le verra dans la partie suivante, les matrices symplectiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices de déterminant 1. Donc en réalité, la question qui se pose est de savoir si le groupe $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Lemme 2 (Transitivité de l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$)

L'action à gauche de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par

$$(M, x) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \mapsto Mx$$

est transitive, c'est à dire que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ \exists M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\ v = Mu.$$

3. On va rapidement s'apercevoir que ce n'est pas évident même dans un cadre simplifié...
4. On verra dans la suite que c'est équivalent à demander K symplectique.

Preuve. Il s'agit de montrer que l'on puisse passer de n'importe quel vecteur à n'importe quel autre via une multiplication par un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. En particulier, on choisit ici (arbitrairement) de montrer que l'on peut atteindre n'importe quel vecteur à partir de $(1,1)$, c'est à dire que l'orbite $Orb((1,1))$ de $(1,1)$ est égale à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

On considère, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice

$$M_\lambda := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda+2 & \lambda-2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, la matrice

$$N_{\lambda,\mu} := \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mu} & \lambda\left(1-\dfrac{1}{\mu}\right) \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

On voit que $\det(M_\lambda) = \det(N_\lambda) = 1$. De plus, M_λ permet de changer la première coordonnée :

$$M_\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $N_{\lambda,\mu}$ transforme la seconde :

$$N_{\lambda,\mu} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

A ce stade, on a atteint tous les vecteurs ayant leur seconde coordonnée non nulle et donc tous les vecteurs non nuls quitte à multiplier par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{2\lambda}{\mu} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On obtient bien $Orb((1,1)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ce qui prouve la transitivité de l'action considérée. $\square$

Etape 2 : Trouver T.

On a donc à disposition un moyen de construire une matrice K qui remplisse le premier objectif. Comme annoncé, on suppose dorénavant que $K = e^{JS}$ où $S \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Cela revient en fait à supposer que $(x^*)^2 + (x^*)^2 = 1$. Le candidat pour T est alors l'opérateur intégral de Fourier (c.f section 3.1) associé à l'oscillateur harmonique quantique $Q = q^W(x, hD)$ où $q(x,\xi) := \dfrac{1}{2}\langle S(x,\xi),(x,\xi)\rangle$. Pour être plus précis, on pose $T = T(1)$ où

$$T(t) := e^{i\frac{t}{h}Q}.$$

C'est l'unique opérateur qui à ψ_0 associe ψ l'unique solution (au temps t) de

$$\begin{cases} hD_t\psi + Q\psi &= 0 \qquad t \in [0,T] \\ \psi(0,x) &= \psi_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.5}$$

On propose dans la suite un calcul explicite dans le cas $S = \dfrac{\pi}{2} I_2$. Cela correspond au cas où $K = J$. En particulier $(p \circ K)(x,\xi) = \xi$ montre que nécessairement $p(x,\xi) = x$. On est donc dans le cas où P est l'opérateur de multiplication par x. Dans ce cas précis on peut s'en sortir avec un calcul simple car $T = \mathcal{F}_h$ est la transformée de Fourier. On a en effet

$$T^{-1}xT\varphi = (\mathcal{F}_h)^{-1}(x\mathcal{F}_h\varphi) = (\mathcal{F}_h)^{-1}(\mathcal{F}_h(hD_x\varphi)) = hD_x\varphi.$$

Ainsi, dans ce cas, on a pu transformer l'opérateur $P(x, D_x) = x$ en l'opérateur hD_x.

On dit que $T = \mathcal{F}_h$ **quantifie** le symplectomorphisme J.

On remarque que cet exemple se généralise immédiatement à $n > 2$ (pour la partie opérateur). Dans le cas général pour S, on pourra trouver des détails dans la section 11.3 de [Zwo04].

Sans l'hypothèse $\kappa = e^{JS}$ cependant, il n'est pas aussi simple de construire un bon q, et c'est encore moins vrai dans le cas où κ n'est pas linéaire (voir la section 2.2.2). C'est là où interviennent les théorèmes de déformation et le théorème d'Egorov qui permettent de traiter la partie non triviale l'étape 2 du théorème de propagation des singularités.

2 Géométrie différentielle et symplectique

Dans toute cette section, p et q désignent des entiers naturels non nuls et U, V désignent des ouverts, respectivement de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$.

2.1 Géométrie différentielle

On se donne pour but dans cette section de fournir les bases et notations nécessaires à la compréhension de ce rapport. On demande comme seul prérequis la connaissance des définitions et propriétés élémentaires des formes différentielles sur les sous-variétés de $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$. On pourra se référer au [Laf96] ; c'est sur ce même livre que nous nous basons pour la suite.

2.1.1 Produit extérieur

On note $x_1, \ldots, x_p$ les coordonnées de $\mathbb{R}^p$ et

$$dx_1, \ldots, dx_p.$$

la base duale canonique. Ce sont donc des formes linéaires de $\mathbb{R}^p$. On définit leur produit tensoriel de la manière suivante :

Définition 9 (Produit tensoriel)

Soient $m \in [\![1, p]\!]$ et $i_1, \ldots, i_m \in [\![1, p]\!]$ des indices. On appelle **produit tensoriel de** $dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_m}$ et on note $dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_m}$ la forme m-linéaire de $\mathbb{R}^p$ définie par

$$dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_m} : \begin{pmatrix} (\mathbb{R}^p)^m & \to & \mathbb{R} \\ (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) & \mapsto & \prod_{j=1}^{m} x_{i_j}^{(j)} \end{pmatrix}$$

où $x_k^{(j)} = dx_k(x^j)$ est la i_j-ième coordonnée du vecteur $x^{(j)} \in \mathbb{R}^p$. En d'autres termes, c'est le produit des coordonnées indexées par les indices i_j.

Les formes m-linéaires définies précédemment par produit tensoriel donnent en fait une base des formes m-linéaires de $\mathbb{R}^p$. Cela permet en particulier d'écrire toute forme f m-linéaire en coordonnées :

$$f(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq p} \alpha_{i_1, \ldots, i_m} \left[dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_m}\right](x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$$

Ensuite, on définit une machine à transformer une application multilinéaire en forme multilinéaire alternée. C'est la même idée que pour définir le déterminant : on applique toutes les permutations possibles au produit précédent.

Définition 10

Soient $m \in [\![1,p]\!]$ et f une forme m-linéaire de $\mathbb{R}^p$. On note et définit :

$$Alt(f) : (x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^p)^m \mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

Remarque

- On vérifie que pour tout f, $Alt(f)$ est une forme alternée et que $f = Alt(f)$ ssi f est alternée.
- On retrouve le déterminant (à une constante près) lorsque f est p-linéaire.

Définition 11 (Produit extérieur)

Soient $m \in [\![1,p]\!]$ et $i_1, \dots, i_m \in [\![1,p]\!]$ des indices. Le **produit extérieur** des dx_{i_j} est la forme m-linéaire alternée définie par

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m} := m! Alt(dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_m}).$$

Exemples.

- *Le déterminant vérifie* $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p = \det$.
- *Dans* $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$*, la forme bilinéiare* $\sigma = d\xi \wedge dx := \sum_{k=1}^{n} d\xi_k \wedge dx_k$ *est très utilisée en géométrie symplectique.*

De la même manière que précédemment, on vérifie que cela fournit une base de l'espace vectoriel Λ^p_m des formes m-linéaires alternées de $\mathbb{R}^p$. On peut à ce stade définir la notion de m-forme différentielle :

Définition 12 (Forme différentielle)

On appelle **forme différentielle de degré** m (ou m-forme différentielle) toute application de U dans Λ^p_m. Si ω est une m-forme différentielle sur U, on note $\omega_x : (\mathbb{R}^p)^m \to \mathbb{R}$ la forme m-linéaire alternée donnée par ω au point x. Par extension, on appelle $0-$forme différentielle toute fonction de $\mathcal{C}^\infty(U)$.
On notera $\Omega^m(U)$ l'algèbre des m-formes différentielles de U, et $\Omega(U) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega^m(U)$.

Exemple. *Si* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *est différentiable,* $df(x) = \sum_{k=1}^{p} \partial_{x_k} f(x) dx_k$ *est une* $1-$*forme différentielle.*

On a précédemment affirmé que $(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq p}$ était une base de Λ_m^p. Cela signifie en particulier que toute forme différentielle peut s'écrire point par point en coordonnées sous la forme

$$\omega_x = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq p} \omega_{i_1,\ldots,i_m}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$$

où les $x \in U \mapsto \omega_{i_1,\ldots,i_m}(x)$, pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq p$, sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Ce sont en quelque sorte les fonctions-coordonnées de ω dans cette base.

La différentielle de fonctions est le premier exemple de forme différentielle, et en réalité on peut généraliser en un certain sens cette opération. Il existe en effet une application qui permet de transformer une $(m+1)-$orme en une m-fforme. On admet l'existence de cette opération, dont la définition est donnée par le théorème suivant.

Proposition 7 (Différentielle extérieure)

Il existe une unique application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- Pour toute $(m+1)-$forme différentielle α, $d\alpha$ est une m-forme différentielle.
- Pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$, df coïncide avec la différentielle de f (au sens classique).
- Pour toutes formes différentielles α, β, $d(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge d\beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$
- $d \circ d = 0$.

On appelle d la **différentielle extérieure**.

2.1.2 Image réciproque et dérivée de Lie

La notion d'image réciproque (*pullback* en anglais) permet de formaliser une notion de "pré-composition" pour les formes différentielles. On voudrait définir une notion de pré-composition (image réciproque) pour pré-composer une forme différentielle par une fonction φ. En particulier, on attend de cette définition que le résultat soit toujours une forme différentielle. On commence par le cas des fonctions, pour lesquelles une définition "naïve" est possible :

Soient $U \subset \mathbb{R}^p$ et $V \subset \mathbb{R}^q$ deux sous-variétés. On définit l'image réciproque d'une application $f : V \to \mathbb{R}$ par $\varphi : U \to V$ par

$$\varphi^* f := f \circ \varphi$$

Pour deux applications, il s'agit juste d'une pré-composition (composition en changeant l'ordre). On aimerait définir de même l'image réciproque d'une forme m-linéaire de $\mathbb{R}^p$ par $\varphi : U \to V$ de la manière suivante : si f est une forme m- linéaire, alors pour $(x_j)_{1 \leq j \leq p} \in (\mathbb{R}^p)^m$, $\varphi^* f(x_1, \ldots, x_m) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m))$. L'inconvénient majeur de cette définition est que le résultat n'est plus une forme multilinéaire, ce qui n'est pas satisfaisant du point de vue des attentes que l'on a exprimées précédemment. En revanche cette définition vaut dans le cas où φ est linéaire. En réalité, **il n'y**

a pas de manière canonique de définir l'image réciproque d'une application multilinéaire par une fonction différentiable quelconque. Une idée serait en effet de considérer la différentielle en un point donné, car c'est une application linéaire. Cependant le choix du point x en lequel on appliquerait la différentielle $d\varphi(x)$ à chaque vecteur x_j est à priori arbitraire.

En revanche, si on imagine qu'une forme multilinéaire puisse dépendre d'un point x, il deviendrait possible de procéder par la différentielle comme nous l'avons imaginé précédemment. Cela tombe bien car "une forme multilinéaire qui dépend d'un point" est la définition même d'une forme différentielle !

Définition 13 (Image réciproque)

Soit ω une forme m-différentielle sur V. L'image réciproque [a] de ω par φ est l'application notée $\varphi^*\omega$ définie en tout point x de U comme

$$\varphi^*\omega_x : \begin{pmatrix} (\mathbb{R}^p)^m & \to & \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_m) & \mapsto & \omega_{\varphi(x)}(d\varphi(x).v_1, \ldots, d\varphi(x).v_m) \end{pmatrix}$$

a. On trouve aussi "tiré en arrière" ou bien "pullback" dans la littérature.

Exemple. *Si f est une fonction, $\varphi^* f = f \circ \varphi$.*

L'objet défini est bien une m-forme différentielle sur U car pour tout $x \in U$, $v \mapsto d\varphi(x).v$ est linéaire.

Proposition 8

Les opérations d et $*$ commutent : pour toute forme α et toute fonction lisse φ,

$$d(\varphi^*\alpha) = \varphi^* d\alpha. \tag{2.1}$$

Une autre utilisation de l'image réciproque se retrouve dans la notion de dérivée de Lie. La dérivée de Lie permet de formaliser une notion de "dérivée le long d'un flot".

Définition 14 (Dérivée de Lie)

Soit $\omega \in \Omega(U)$ et $X : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ un champ de vecteurs. On considère le flot $\varphi_t : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ associé à l'équation différentielle de champ X, c'est à dire l'unique solution du problème de Cauchy

$$\partial_t \varphi_t = X(\varphi_t)$$

vérifiant $\varphi_0 = id_{\mathbb{R}^p}$. On définit alors la dérivée de Lie de ω par rapport à X comme étant la quantité

$$\mathcal{L}_V(\omega) := (\partial_t(\varphi_t^*\omega))_{|t=0}$$

Il n'est pas forcément évident de calculer la dérivée par rapport à t de $\varphi_t^*\omega$, c'est pourquoi on utilise plus souvent les propriétés et les formules liées à la dérivée de Lie. L'une des formules les plus utiles est la suivante.

Proposition 9 (Formule de Cartan)

On reprend les notations précédentes. Alors

$$\mathcal{L}_X(\omega) = d(X \lrcorner \omega) + X \lrcorner d\omega.$$

C'est la formule qui est utilisée en pratique pour le calcul de la plupart des dérivées de Lie.

Théorème 2 (Lemme de Poincarré)

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert étoilé. Alors toute forme $\omega \in \Omega(U)$ vérifiant $d\omega = 0$ est la différentielle d'une autre forme :

$$\exists \alpha \in \Omega(U),\ d\alpha = \omega$$

On trouvera une preuve de ces deux théorèmes dans [Laf96].

2.1.3 Champs de vecteurs

On peut aussi s'intéresser au "transport" de champs de vecteurs et définir comme pour les formes différentielles un image réciproque, et aussi une image directe, par une application lisse. On appelle ici champ de vecteurs toute application lisse entre U et V.

Définition 15 (Image et image réciproque pour les champs de vecteurs)

Soient $X : U \to V$ et $Y : V \to U$ deux champ de vecteurs. Soit $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme. On définit

- L'image de X par φ comme étant le champ de vecteurs de V défini en tout point $y = \varphi(x) \in V$ par
$$\varphi_* X(y) := (d\varphi(x))(X(x))$$
- L'image réciproque Y par φ comme étant le champ de vecteurs de U défini en tout point $x \in U$ par
$$\varphi^* Y(x) := (d\varphi(x))^{-1}(Y(\varphi(x)))$$

On voit que ces deux opérations sont l'inverse (au sens de la composition) l'une de l'autre :

Proposition 10

On reprend les notations précédentes. Alors

- $\varphi^*\varphi_* X = X$,
- $\varphi_*\varphi^* Y = Y$.

Dans le cas où l'on parle d'un champ de vecteurs au sens d'une $1-$forme différentielle, l'image est à comprendre au sens de l'identification entre vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et formes linéaires de $\mathbb{R}^p$, à savoir $\mathbb{R}^p \simeq (\mathbb{R}^p)^*$. Plaçons-nous par exemple en dimension 2 ($n = 1$) et posons $\varphi(x, \xi) = J(x, \xi)$, $q(x, \xi) = \dfrac{1}{2}(x^2 + \xi^2)$ et H_q le champ hamiltonien $\xi\partial_x - x\partial_\xi$ associé. Ici J désigne la matrice de rotation d'angle $\pi/2$ (voir section suivante). Alors si l'on se permet la notation (abusive) de coordonnées $(\alpha, \beta) = \alpha\partial_x + \beta\partial_\xi$ on a

$$\varphi^* H_q(x, \xi) = (d\varphi(x, \xi))^{-1}(\xi\partial_x - x\partial_\xi) = x\partial_x + \xi\partial_\xi.$$

Il est également possible de définir un produit entre un champ de vecteurs et une forme différentielle, c'est la notion de produit intérieur. Contrairement au produit extérieur, il fait baisser le degré de la forme différentielle que l'on considère.

Définition 16 (Produit intérieur)

Soit X un champ de vecteurs sur U et $\omega \in \Omega^{m+1}(U)$. Le produit intérieur de ω par X est la m- forme différentielle de U notée $X \lrcorner\, \omega$ définie en tout point $x \in U$ et tous vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ de $\mathbb{R}^p$ par

$$(X \lrcorner\, \omega)_x(v_1, \ldots, v_m) := \omega_x(X(x), v_1, \ldots, v_m).$$

C'est une notion qui permet par exemple de ramener [5] le déterminant de $\mathbb{R}^p$ sur une forme volume sur la sphère unité $\mathbb{S}^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$ afin d'en calculer le volume.

Cette opération se distribue par ailleurs avec l'image réciproque :

Proposition 11

Soient $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$, X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^p$ et $\omega \in \Omega^{m+1}(U)$ Alors

$$\varphi^*(X \lrcorner\, \omega) = \varphi^* X \lrcorner\, \varphi^*\omega \tag{2.2}$$

5. Moyennant une image réciproque par l'inclusion $\iota : \mathbb{S}^{p-1} \to \mathbb{R}^p$.

Preuve. On remarque que $\varphi^* X \lrcorner \varphi^* \omega = (X \circ \varphi) \lrcorner \varphi^* \omega$. Ensuite, pour $x \in U$ et $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned}
(\varphi^*(X \lrcorner \omega))_x(v_1, \ldots, v_m) &= (X \lrcorner \omega)_{\varphi(x)}(d\varphi(x).v_1, \ldots, d\varphi(x).v_m) \\
&= \omega_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)), d\varphi(x).v_1, \ldots, d\varphi(x).v_m) \\
&= ((X \circ \varphi) \lrcorner \varphi^* \omega)_x (v_1, \ldots, v_m)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

2.2 Géométrie symplectique

Dans toute cette section, $p = q = 2n$ sauf mention contraire.

2.2.1 Géométrie symplectique linéaire

Dans ce paragraphe, nous présentions les différentes transformations symplectiques utilisées dans ce rapport, en particulier les matrices symplectiques et les symplectomorphismes (version non-linéaire). Dans la langue française, symplectique signifie littéralement "qui est entrelacé avec un autre corps". Lorsque l'on cherche une définition de la racine grecque de "symplectique", on tombe sur "complexe"[6]. Les notions mathématiques de structures et objets symplectiques sont en effet à rapprocher de la notion de nombre complexe. Pour ne citer qu'un exemple, on peut voir la canonique de matrice symplectique comme une généralisation matricielle de i.

Définition 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On dit que M est symplectique lorsqu'elle vérifie

$$M^T J M = J$$

où $J_n := \begin{pmatrix} (0) & (I_n) \\ (-I_n) & (0) \end{pmatrix}$. On note $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Exemple. *Comme annoncé, la matrice $J = J_n$ est bien symplectique. Elle est en effet antisymétrique et vérifie $J^2 = -I_{2n}$, donc $J^T J J = J$. On peut pousser l'analogie avec l'unité*[7] *complexe i un peu plus loin en remarquant que $J = e^{\frac{\pi}{2} J}$. En effet, si l'on considère l'équation de l'oscillateur harmonique* (1.2)*, on peut la réécrire comme*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}$$

6. Voir par exemple sur le Wiktionnaire

7. Nous passons sous silence l'existence du frère caché de i, à savoir $-i$, qui montre qu'il n'y a pas de choix *canonique* d'une unité complexe...

d'où

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix} = e^{tJ} \begin{pmatrix} x(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $J = e^{\frac{\pi}{2}J}$.

Même si la géométrie symplectique peut être rapprochée en ce sens de la notion de nombre complexe, elle ne fait intervenir que des matrices aux coefficients réels. Il sera néanmoins fait plus tard un lien entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ (c.f Lemme 5).

Proposition 12 (Caractérisation en dimension 1)

$\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Preuve. En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on obtient

$$M^T J M = J^T \iff \begin{pmatrix} 0 & -cb+ad \\ -da+bc & 0 \end{pmatrix} = J \iff \det(M) = 1.$$

□

Contre-exemple. *En dimension quelconque une matrice symplectique vérifie toujours* $\det(M^T J M) = \det(J)$ *i.e* $\det(M)^2 = 1$, *et on peut en fait montrer*[8] *que* $\det(M) = 1$, *mais la réciproque est fausse. On peut par exemple remarquer que la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de déterminant 1 *mais n'est pas symplectique. En fait, en écrivant* $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$, $M_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on montre avec un calcul similaire à la caractérisation en dimension* 1 *que* M *est symplectique si et seulement si* $M_1^T M_4 - M_3^T M_2 = I_n$. *Il est donc aisé de faire obstruction à cette équation en rendant par exemple* M_3 *nul et en s'assurant que* $M_1^T M_4 \neq I_n$.

Contre-exemple. *Un autre sous-ensemble de* $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ *est* $\mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$. *Cependant il existe des matrices de rotations qui ne sont pas symplectiques, comme toutes les rotations de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $c^2 + s^2 = 1$, $c \neq 1$.

8. Voir par exemple la preuve élémentaire de Donsub Rim (arXiv :1505.04240 [math.HO])

Définition 18

La forme (bilinéaire) symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, notée σ, est la forme $2-$linéaire de $\mathbb{R}^{2n}$ définie par

$$\sigma : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} & \to & \mathbb{R} \\ ((x,\xi),(y,\eta)) & \mapsto & \langle \xi, y\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle x, \eta\rangle_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix}$$

Remarque

> Cette forme bilinéaire vérifie $\sigma\left(\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \left\langle J \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$.

Proposition 13 (Caractérisations en dimension n)

Soit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. M est symplectique
2. M est inversible et $M^{-1} = JM^TJ^T = -JM^TJ$
3. M préserve σ, c'est à dire $\forall v, w \in \mathbb{R}^{2n}, \sigma(Mv, Mw) = \sigma(v, w)$.

Preuve. La proposition 14 fournit l'inversibilité des matrices symplectiques. De plus, si M est inversible alors

$$M^TJM = J \iff M^TJ = JM^{-1} \iff J^TM^TJ = -JM^TJ = M^{-1}$$

Pour le dernier point, on constate d'abord que si M est symplectique alors elle conserve σ. En effet, si $v = (x, \xi)$ et $w = (y, \eta)$ sont dans $\mathbb{R}^{2n}$ alors en reprenant les notations par blocs précédentes on a

$$\sigma(Mv, Mw) = \langle Mv, JMw\rangle = \langle v, M^TJMw\rangle = \langle v, Jw\rangle = \sigma(v, w)$$

Réciproquement, ce calcul montre que si $\forall (v, w) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \sigma(Mv, Mw) = \sigma(v, w)$ alors $M^TJM = J$. L'identification provient alors du théorème de représentation de Riesz dans $\mathbb{R}^{2n}$. $\square$

Remarque

> - Le dernier point est, dans certains ouvrages, la définition d'un symplectomorphisme linéaire. Dans le cas non linéaire, où sigma sera une forme différentielle, c'est comme cela que nous définirons la notion de symplectomorphisme.
> - On peut effectuer le parallèle avec les isométries, qui elles préservent le produit scalaire (ou hermitien). L'aspect espace vectoriel symplectique et formes linéaires symplectiques n'est pas

développé dans ce rapport, mais on pourra se référer à des textes comme [BW97] (section 3.1) ou [HH94] (chapitre 1). On pourra y retrouver des résultats qu'il peut être bon de garder en tête ici, comme le fait qu'un espace vectoriel muni d'une forme symplectique est toujours de dimension paire (ce qui explique le choix de $\mathbb{R}^{2n}$).

Comme l'insinue la remarque précédente les notions d'orthogonalité et de symplectisme, bien que distinctes, sont reliées. On donne ici un résultat sur les matrices qui sont à la fois symplectiques et orthogonales, qui sera utilisé à un moment crucial de la preuve du théorème 6 de déformation des symplectomorphismes.

Lemme 3 (Caractérisation des matrices symplectiques orthogonales)

$$\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M_1M_2^T = M_2M_1^T, M_1M_1^T + M_2M_2^T = I_n \right\}.$$

Preuve. Soit $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On a

$$M \in \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \iff M^{-1} = M^T = -JM^TJ \iff MJ = JM \text{ et } M^{-1} = M^T$$

On traduit la première égalité en termes de blocs de M :

$$MJ = JM \iff \begin{pmatrix} -M_2 & M_1 \\ -M_4 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_3 & M_4 \\ -M_1 & -M_2 \end{pmatrix} \iff M_3 = -M_2, M_4 = M_1.$$

Enfin, lorsque l'on traduit la condition $MM^T = I_{2n}$ on trouve

$$MM^T = I_{2n} \iff \begin{pmatrix} M_1M_1^T + M_2M_2^T & M_1M_2^T - M_2M_1^T \\ -(M_1M_2^T - M_2M_1^T) & M_1M_1^T + M_2M_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

d'où la caractérisation annoncée. $\square$

Si l'on s'intéresse aux propriétés algébriques de $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$, on s'aperçoit rapidement que $2J$ n'est pas symplectique : $(2J)^TJ(2J) = 4J \neq J$. $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ n'est donc ni stable par addition, ni par multiplication par un scalaire. En revanche c'est un groupe pour la multiplication :

Proposition 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}), \times)$.

Preuve. La matrice identité I est bien dans $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$ et si M est symplectique, alors M^{-1} aussi :

$$(M^{-1})^T J M^{-1} = (-JM^T J)^T J M^{-1} = -JMJJM^{-1} = J$$

Enfin, si M et N sont deux matrices symplectiques alors

$$(MN)^T J(MN) = N^T \left(M^T J M\right) N = N^T J N = J.$$

□

Nous sommes rassurés de constater cette propriété, car nous serons amenés par la suite à manipuler des flots d'équations différentielles en tant que symplectomorphismes (non linéaires), et la moindre des chose est de s'assurer que l'on puisse les composer. La version linéaire que nous venons de prouver nous indique que nous sommes sur la bonne voie.

2.2.2 Champs de vecteurs hamiltoniens et symplectomorphismes non linéaires

A présent, on s'intéresse à la version non-linéaire des matrices symplectiques, ainsi que du lien avec les champs de vecteurs hamiltoniens. Dans ce rapport, ces champs de vecteurs constitueront la motivation principale de l'introduction des symplectomorphismes : ces derniers seront en effets construits de manière à "préserver", en un sens à définir, les champs de vecteurs hamiltoniens.

On commence par une remarque concernant la forme bilinéaire σ définie précédemment. Avec les notations de la géométrie différentielle, on notera désormais

$$\sigma = d\xi \wedge dx := \sum_{k=1}^{n} d\xi_k \wedge dx_k.$$

C'est donc une $2-$forme différentielle, que l'on appellera **forme (différentielle) symplectique canonique de** $\mathbb{R}^{2n}$. Il n'y a donc aucune redondance dans la notation σ, que l'on voit simplement ici comme une $2-$forme différentielle constante.

Remarque

> Lorsque $n = 1$, $\sigma = -\det$. Cependant, ce n'est plus une forme volume pour $n \geq 2$.

Définition 19 (Symplectomorphisme)

On appelle **symplectomorphisme de** U toute application $\kappa \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^{2n})$ qui préserve σ, c'est à dire telle que

$$\kappa^* \sigma = \sigma \tag{2.3}$$

Exemples.

- *Toute application linéaire associée à une matrice symplectique est un symplectomorphisme.*
- *Les champs de vecteurs hamiltoniens définissent de manière "canonique" un symplectomorphisme. (voir 2.2.2)*

On présente une autre propriété de σ qui sera utile par la suite :

Lemme 4 (Identification dans le produit intérieur)

On se donne un entier non nul p et un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ non vide. Soit ω une $2-$forme différentielle non dégénérée sur U, c'est à dire qu'en tout point $x \in U$, ω_x est une forme bilinéaire non dégénérée, c'est à dire que $v \in \mathbb{R}^p \mapsto \omega_x(v, \cdot) \in (\mathbb{R}^p)^*$ est un isomorphisme. Soient X, Y deux champs de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ tels que $X \lrcorner \omega = Y \lrcorner \omega$. Alors $X = Y$.

Preuve. Puisque U est non vide, on peut fixer un $x \in U$. Soit $v \in \mathbb{R}^p$.
On a $X \lrcorner \omega = Y \lrcorner \omega$, donc

$$\omega_x(X(v), \cdot) = \omega_x(Y(v), \cdot).$$

Par linéarité à gauche, on obtient $\omega_x(X(v) - Y(v), \cdot) = 0$ d'où $X(v) = Y(v)$ par non-dégénérescence de ω_x. $\square$

Exemple. *Par exemple, σ est non dégénérée donc $X \lrcorner \sigma = Y \lrcorner \sigma \Longrightarrow X = Y$.*

A présent, on définit la notion de champ de vecteurs hamiltonien. On a vu un exemple en 1.1, et on généralise ici ce concept en une définition plus intrinsèque (c'est à dire qui ne fait pas intervenir de coordonnées). Moralement, un champ de vecteurs hamiltonien est un champ de vecteurs qui préserve la structure symplectique.

Définition 20 (Champ de vecteurs hamiltonien)

Soit $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. On appelle **champ de vecteurs hamiltonien associé à** p et on note H_p le champ de vecteurs défini par

$$H_p := -\widetilde{\sigma}^{-1}(dp)$$

où $\widetilde{\sigma}$ est l'isomorphisme $x \mapsto \sigma(x, \cdot)$.

Proposition 15

De manière équivalente, H_p est l'unique champ de vecteurs vérifiant

$$H_p \lrcorner \sigma = -dp. \tag{2.4}$$

Preuve. Par définition, $\widetilde{\sigma}(H_p) = -dp$ et donc $\sigma(x, H_p) = -dp_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{2n}$. C'est exactement 2.4. L'unicité provient du lemme 4. $\square$

Exemple. *Soit* $q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$*. Alors le flot* $\kappa_t := e^{tH_q}$ *associé au hamiltonien* H_q *est un symplectomorphisme. En effet, on peut montrer que* $\frac{d}{dt}(\kappa_t^* \sigma) = 0$ *pour tout* t*. Si ce résultat est vrai alors* $\kappa_t^*\sigma = \kappa_0^*\sigma = \sigma$ *et on a bien le résultat. Pour montrer cela, on remarque tout d'abord que, par définition de la dérivée de Lie selon le flot* κ_t *défini par le champ de vecteurs* H_q *:*

$$\frac{d}{dt}(\kappa_t^*\sigma)_{|t=0} = \mathcal{L}_{H_q}\sigma.$$

D'autre part, d'après la formule de Cartan et en rappelant que $d\sigma = d(d\xi \wedge dx) = 0$ *et* $H_q \lrcorner \sigma = -dq$*,*

$$\mathcal{L}_{H_q}\sigma = d(H_q \lrcorner \sigma) + H_q \lrcorner d\sigma = d(-dq) + 0 = 0$$

d'où $\frac{d}{dt}(\kappa_t^*\sigma)_{|t=0} = 0$*. Pour passer à un temps quelconque* t_0*, on rappelle une propriété du flot* κ_t *qui est que pour tous* $t, s \in \mathbb{R}$*,* $\kappa_t \circ \kappa_s = \kappa_{t+s}$*. En l'occurrence,*

$$\kappa_t^*\kappa_{t_0}^*\sigma = \sigma \circ (\kappa_t \circ \kappa_{t_0}) = \kappa_{t+t_0}^*\sigma$$

car κ_t *est linéaire donc* $\partial\kappa_t = \kappa_t$*. Donc pour tous* $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$*,*

$$\frac{d}{dt}(\kappa_t^*\sigma)_{|t=t_0}(x,\xi) = \frac{d}{dt}(\kappa_t^*\sigma)_{|t=0}(\kappa_{t_0}(x,\xi)) = 0.$$

Théorème 3 (Théorème de Jacobi)

Si κ est un symplectomorphisme sur $\mathbb{R}^{2n}$ alors pour toute fonction $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$,

$$H_p = \kappa_* \left(H_{\kappa^* p}\right).$$

Preuve. Notre but est de montrer que $\kappa^* H_p \lrcorner \sigma = H_{\kappa^* p} \lrcorner \sigma$. On utilisera ensuite le lemme 4 pour conclure.

D'après les équations (2.2) et (2.1) on a

$$\begin{aligned} \kappa^* H_p \lrcorner \sigma &= \kappa^* H_p \lrcorner \kappa^* \sigma \\ &= \kappa^* \left(H_p \lrcorner \sigma\right) \\ &= -\kappa^* dp \\ &= -d(\kappa^* p) \\ &= H_{\kappa^* p} \lrcorner \sigma \end{aligned}$$

d'où $\kappa^* H_p = H_{\kappa^* p}$. On en déduit donc, d'après la propriété 10 en appliquant κ_* à gauche, $H_p = \kappa_* H_{\kappa^* p}$. □

En réalité, il manque un dernier théorème pour manipuler les symplectomorphismes comme nous en aurons besoin. Il s'agit d'une version non-linéaire du théorème de Darboux, que l'on trouvera en annexe A.

3 Théorème d'Egorov et quantification de symplectomorphismes

3.1 Opérateurs de Fourier et dynamique quantique en temps court

On se donne dans la suite de ce paragraphe un réel strictement positif T et un symbole $p \in S$. On note $P = p^W(x, hD)$ l'opérateur pseudo-différentiel obtenu en quantifiant p. On s'intéresse à l'équation pseudo-différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rll} hD_t F(t) + PF(t) & = 0 & t \in [0, T] \\ F(0) & = I. & \end{array} \right. \tag{3.1}$$

à inconnue $F(t) : L^2 \to L^2$.

Cette équation peut être vue comme une modification de l'équation de Schrödinger (ici P est un opérateur pseudo-différentiel quelconque, là où l'équation de Schrödinger dans sa forme habituelle correspond au cas $P = \Delta_x$ même si dans ce cas $|\xi|^2 \notin S$).

Définition 21

On appelle **opérateur intégral de Fourier associé à** P [a] et on note $e^{-itP/h}$, le flot de l'équation (3.1).

[a] On trouve aussi "propagateur associé à P dans la littérature.

Concrètement, il s'agit de l'application

$$e^{-itP/h} : \left(\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \psi_0 & \mapsto & \psi(t, \cdot) \end{array} \right)$$

où ψ désigne la solution de l'équation différentielle ordinaire (et même linéaire)

$$\left\{ \begin{array}{rll} hD_t \psi + P\psi & = 0 & t \in [0, T] \\ \psi(0, x) & = \psi_0. & \end{array} \right. \tag{3.2}$$

La notation $e^{-itP/h}$ fait penser à un opérateur unitaire. On se propose de montrer ce fait :

Proposition 16

Pour tout $t \in [0, T]$, $e^{-itP/h}$ définit bien un opérateur linéaire unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. On note $F(t) = e^{-itP/h}$. D'après le théorème de Calderon-Vaillancourt, $P \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ est un opérateur linéaire borné. En particulier l'équation (3.2) admet une unique solution ψ en tant que problème de Cauchy linéaire.[9] Ainsi, $e^{-itP/h}$ est bien défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En ce qui concerne la linéarité, comme dit précédemment l'équation différentielle (3.2) est linéaire. Les opérateurs P et hD_t sont en effet linéaires. On en déduit que $e^{-itP/h}$ est un opérateur linéaire.

Il nous reste à montrer que $e^{-itP/h}$ est à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et unitaire. Pour cela, on rappelle que la quantification de Weyl produit des opérateurs auto-adjoints (ou unitaires). Donc $P = P^*$ en tant qu'opérateur borné de L^2. On remarque par ailleurs que $(hD_tF(t))^* = h(D_t^*)F(t)^* = -hD_tF(t)^*$. On considère ici l'adjoint en espace, c'est à dire une intégrale sur $\mathbb{R}^n_x$ qui ne dépend pas du temps, c'est pourquoi ∂_t est auto-adjoint et commute avec $F(t)$. Ainsi en appliquant l'adjoint en espace et à t fixé à l'équation (3.1), il vient

$$\begin{cases} hD_tF(t)^* - F(t)^*P &= 0 \quad t \in [0,T] \\ F(0)^* &= I. \end{cases} \tag{3.3}$$

On calcule maintenant $hD_t\left(F(t)F(t)^*\right)$. Il vient :

$$\begin{aligned} hD_t\left(F(t)F(t)^*\right) &= \left(hD_tF(t)\right)F(t)^* + F(t)\left(hD_tF(t)^*\right) \\ &= (-PF(t))F(t)^* + F(t)PF(t)^* \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que P et $F(t)$ commutent. Pour prouver cela, on se donne $\psi_0 \in L^2$ et on note Ψ la solution de l'équation (3.2) avec condition initiale $\Psi(0,x) = P\psi_0(x)$. On remarque alors que $P\psi$ vérifie la même équation $hD_t(P\psi) + P(P\psi) = 0$ avec même condition initiale $P\psi(0,x) = P\psi_0(x) = \Psi(0,x)$. Par unicité dans (3.2), on en déduit que $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $\Psi(t,x) = P\psi(t,x)$. En d'autres termes, $\forall t \in [0,T], F(t)P = PF(t)$.

On conclut en remarquant que $F(0)F(0)^* = I$ et donc $\forall t \in [0,T], F(t)F(t)^* = I$. $\square$

Remarque

Dans ce cas ($q_t = q$ indépendant de t), on peut définir une famille de symplectomorphismes comme étant $\kappa_t := e^{tH_q}$, c'est à dire le flot de l'équation hamiltonienne associée au hamiltonien H_q. On a donc

$$\partial_t\kappa_t = H_q = (\kappa_t)_*H_q$$

où la dernière égalité provient du théorème de Jacobi. En effet, d'après la propriété 1 l'énergie est conservée par κ_t : $\dfrac{d}{dt}(x(t),\xi(t)) = \dfrac{d}{dt}(\kappa^*q)(x_0,\xi_0) = 0$ d'où $(\kappa_t)_*H_q = H_{(\kappa_t)^*q} = H_q$.

Dans la suite, nous allons être amenés à étudier des familles de symboles q_t qui dépendent du temps t. Une des questions qui s'est posée durant le stage est : "est-il bien nécessaire de considérer

9. On remarque d'ailleurs que, pour peu que $P = P(t)$ dépende de manière $\mathcal{C}^\infty$ de t, l'existence et l'unicité de ψ reste vérifiée. Le caractère lipschitzien reste en effet assuré par le fait que P est borné dans l'espace de Banach $L^2(\mathbb{R}^n)$).

q_t dépendant du temps ? Peut-on simplifier le théorème d'Egorov en se restreignant au cas des symboles indépendants du temps ?". En effet, s'affranchir de la dépendance en temps permet de s'affranchir du formalisme des images réciproques de formes différentielles, comme le montre le début de cette section 3.1. La réponse à la seconde question est donc **oui**, car cela allège le bagage nécessaire pour énoncer le théorème d'Egorov.

Cependant la preuve dans [Zwo04] s'appuie fortement sur le théorème de déformation des symplectomorphismes et ses dérivés (voir section 3.3). Comme son nom l'indique, ce théorème consiste à construire une déformation d'un symplectomorphisme κ afin de trouver un symplectomorphisme κ_t et une famille de symboles (q_t) vérifiant

$$\forall t \in [0,1],\ \partial_t \kappa_t = (\kappa_t)_* H_{q_t}. \tag{3.4}$$

La réponse à la première question est donc **non**, en tout cas dans le cadre de la preuve choisie.

Remarque

Cette équation (3.4) signifie que pour toute fonction $a \in \mathcal{C}^\infty$ on a

$$\partial_t \kappa_t^* a = H_{q_t} \kappa_t^* a \tag{3.5}$$

Revenons un instant sur l'équation (3.4). Si l'on se donne une famille $q_t \subset S$ de symboles, alors on peut faire de cette EDO un problème de Cauchy, et ainsi *définir* un symplectomorphisme κ_t comme étant la solution du problème de Cauchy ((3.4), $\kappa_0 = I$). Ici il s'agit d'une solution maximale, mais le théorème cible (formes normales) étant un théorème local, on aura tout intérêt dans la suite à prendre q_t à support compact.

Pour la suite, on admet la version "dépendante du temps" du théorème précédent :

Proposition 17

Soit $Q(t) = q_t^W(x, hD)$. On suppose que $t \mapsto q_t$ est $\mathcal{C}^\infty$. Alors il existe un unique opérateur borné unitaire $F(t) : L^2 \to L^2$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{rll} hD_t F(t) + Q(t)F(t) & = 0 & t \in [0,T] \\ F(0) & = I. & \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Par ailleurs, il sera utile pour la suite de garder en tête l'équation vérifiée par F^*, similaire à l'équation précédente dans le cas $q_t = q$ et obtenue en appliquant l'opération "adjoint" (en epsace) à l'équation précédente :

$$\left\{ \begin{array}{rll} hD_t F(t)^* - F(t)^* Q(t) & = 0 & t \in [0,T] \\ F(0)^* & = I. & \end{array} \right. \tag{3.7}$$

3.2 Quantification globale : Théorème d'Egorov

On se donne un symbole q_t à support $\text{supp}(q_t) \subset U_0$ où U_0 est un ouvert borné indépendant de t. On peut définir comme précédemment une famille de symplectomorphismes κ_t qui valent $I = id_{\mathbb{R}^{2n}}$ hors de U_0 et qui vérifient

$$\begin{cases} \partial_t \kappa_t & = (\kappa_t)_* H_{q_t} \quad t \in [0,T] \\ \kappa_0 & = I. \end{cases} \tag{3.8}$$

On reprend également la famille $F(t)$, $t \in [0,T]$, de la proposition précédente. On dispose à ce stade de tous les outils pour énoncer le théorème d'Egorov.

Théorème 4 (Théorème d'Egorov)

Soit m une fonction d'ordre et $a \in S(m)$. Alors pour tout $t \in [0,T]$,

$$F(t)^{-1} a^W(x,hD) F(t) = b_t^W(x,hD)$$

où $b_t \in S(m)$ soit de la forme

$$b_t(x,\xi) = \kappa_t^* a(x,\xi) + O_S(h).$$

Ce théorème montre qu'on peut approcher en temps arbitraire T une évolution quantique $A = a^W(x,hD)$ par une évolution $B = b^W(x,hD)$ dont le symbole est $\kappa_t^* a(x,\xi)$, à $O(h)$ près. On rappelle que $\kappa_t^* a(x,\xi)$ vérifie l'équation hamiltonienne classique (3.8) (lorsque $q_t = q$ on retrouve (1.1)). En ce sens, on a **approché une évolution quantique par une évolution classique**.

Expliquons tout d'abord le schéma de la preuve avant de l'écrire. Notre but est de montrer que l'opérateur $B(t) := F(t) A F(t)^{-1}$ est de la forme $b_t^W(x,hD)$ voulue. Notre point de départ est l'opérateur suivant :

$$B_0(t) := (\kappa_t^* a(x,\xi))^W(x,hD).$$

On se propose de montrer que $B(t) = B_0(t) + O_{L^2\to L^2}(h)$. A priori, on pourrait s'arrêter après avoir montré cela et conclure, **sauf qu'on ne sait à priori pas que $B(t)$ est un opérateur pseudo-différentiel**, c'est à dire de la forme $b_t^W(x,hD)$ avec b_t un symbole. C'est ce point qui va nous pousser à construire successivement d'autres opérateurs B_k qui approchent B en $O_{L^2\to L^2}(h^{k+1})$. La raison qui mène à constuire de tels opérateurs est le théorème suivant, dû à Richard Beals, qui fournit une caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels :

Théorème 5 (Théorème de Beals)

Soit $A : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ un opérateur continu. Alors A est un opérateur pseudo-différentiel, c'est à dire $\exists a \in S, A = a^W(x, hD)$, si et seulement si pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour toutes formes linéaires $(l_1, \ldots, l_N)$,

$$\left\| ad_{l_1(x,hD)} \ldots ad_{l_N(x,hD)} A \right\|_{L^2 \to L^2} = O(h^N).$$

Avec ce théorème et les développements asymptotiques dont on dispose sur les commutateurs d'opérateurs pseudo-différentiels, on pourra conclure. On aura d'ailleurs un peu mieux que le résultat annoncé, au sens où on peut pousser le développement à un degré arbitraire (même si les B_k pour $k > 0$ ne sont à priori pas une évolution classique explicite).

Preuve. **Etape 1 : Montrons que** $B(t) = B_0(t) + O_{L^2 \to L^2}(h)$**.**

On calcule $hD_t B_0(t)$ c'est à dire $\dfrac{h}{i} \left(\partial_t \left(\kappa_t^* a(x,\xi)\right)\right)^W$. D'après (3.5) on a

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\kappa_t^* a(x,\xi)\right) &= H_{q_t} \kappa_t^* a \\ &= \{q_t, \kappa_t^* a\} \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la définition de H_{q_t}. On utilise ensuite l'expression à l'ordre 2 en h développement asymptotique du commutateur de $Q(t) = q_t^W$ et de $(\kappa *_t^* a)^W = B_0(t)$. On obtient

$$\begin{aligned} hD_t B_0(t) = \frac{h}{i} \left\{q_t, \kappa^* a\right\}^W (x, hD) &= \left[q^W, (\kappa_t^* a)^W\right](x, hD) + O(h^2) \\ &= [Q, B_0(t)] + E(t) \end{aligned}$$

avec $E(t) = e_t^W$, où $h^{-2} e^t \in \mathcal{C}_c^\infty \subset \mathscr{S}$. En effet, à t fixé le symbole q_t est à support compact et tous les termes du développement asymptotique du commutateur précédent comportent un terme de la forme $\partial^\alpha q_t^k$, $\alpha \neq 0$, $k \neq 0$. Ainsi $E(t) = O_{L^2 \to L^2}(h^2)$ d'après le théorème de Caldéron-Vaillancourt. On montre maintenant que $F(t) B_0(t) F(^t)^{-1} = A + O_{L^2 \to L^2}(h)$. On calcule la dérivée du terme de gauche en gardant en tête que $F(t)^{-1} = F(t)^*$ en gardant en tête l'équation (3.7) vérifiée par F^*. On a

$$\begin{aligned} hD_t (F(t) B_0(t) F(t)^*) &= -Q(t) F(t) B_0(t) F(t)^* + F(t) hD_t B_0(t) F(t)^* + F(t) B_0(t) F(t)^* Q(t) \\ &= F(t) [B_0(t), Q(t)] F(t)^* + F(t) \left([Q(t), B_0(t)] + E(t)\right) F(t)^* \\ &= F(t) E(t) F(t)^* \\ &= O_{L^2 \to L^2}(h^2) \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fair que $F(t)$ est unitaire. En particulier cela signifie que conjuguer par F ne change pas la norme :

$$\forall u \in L^2, \|F(t) E(t) F(t)^* u\|_{L^2} = \|E(t) F(t)^* u\|_{L^2} = \|E(t)^* F(t)^{**} u\|_{L^2} = \|E(t) u\|_{L^2}.$$

A ce stade, on a alors, pour tout $u \in L^2$ et $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F(t)B_0(t)F(t)^*u(x) = F(0)B_0(0)F(0)^*u(x) + \frac{i}{h}\int_0^t F(s)E(s)F(s)^*u(x)ds = Au(x) + O_{L^2}(h)$$

car $0 \leq t \leq T$. Donc $F(t)B_0(t)F(t)^* = A + O_{L^2\to L^2}(h)$. Or

$$B(t) = F(t)^*AF(t) = F(t)^*\left(F(t)B_0(t)F(t)^* + O_{L^2\to L^2}(h)\right)F(t) = B_0(t) + O_{L^2\to L^2}(h)$$

ce qui est ce que l'on voulait montrer pour cette première étape.

Etape 2 : Construction des B_k.

Pour cette étape, on suppose construit pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque des opérateurs pseudo-différentiels $B_k(t)$ et $E_k(t)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rl} hD_tB_k(t) & = [Q(t), B_k(t)] + E_k(t) \\ B_k(0) & = A \\ E_k(t) & = e_{k,t}^W(x, hD),\ h^{k+2}e_{k,t} \in S. \end{array}\right. \tag{3.9}$$

Notre but est de trouver deux opérateurs pseudo-différentiels B_{k+1} et E_{k+1} tels que

$$\left\{\begin{array}{rl} hD_tB_{k+1}(t) & = [Q(t), B_{k+1}(t)] + E_{k+1}(t) \\ B_{k+1}(0) & = A \\ E_{k+1}(t) & = e_{k+1,t}^W(x, hD),\ h^{k+3}e_{k+1,t} \in S. \\ B_{k+1}(t) - B_k(t) & = O_{L^2\to L^2}(h^{k+1}) \end{array}\right.$$

On considère $c_{k+1,t} := \dfrac{i}{h}(\kappa_t)^*\left(\displaystyle\int_0^t (\kappa_t^{-1})^*e_{k,s}\right)$. Ici comme $h^{k+2}e_{k,t} \in S$, on a $h^{k+1}c_{k+1,t} \in S$. De plus

$$\begin{aligned} hD_tc_{k+1,t} &= \partial_t\left(\left((\kappa_t)^*\int_0^t (\kappa_t^{-1})^*e_{k,s}\right)\right) \\ &= \left\{q, \left((\kappa_t)^*\int_0^t (\kappa_t^{-1})^*e_{k,s}\right)\right\} + e_{k,s} \\ &= \{q, c_{k+1,t}\} + e_{k,s}. \end{aligned}$$

Comme pour le calcul de l'étape 1, on se sert de la structure Hamiltonienne pour faire apparaître un crochet de Poisson. On pose alors $C_{k+1}(t) := c_{k+1,t}^W(x, hD)$. On obtient, par développement asymptotique, un opérateur pseudo-différentiel $E_{k+1}(t) = e_{k+1,t}^W(x, hD)$ avec $h^{k+3}e_{k+1,t} \in S$ et

$$hD_tC_{k+1,t} = ([Q, C_{k+1}(t)] - E_{k+1}(t)) + E_k(t).$$

Ainsi, en posant $B_{k+1} := B_k - C_{k+1}$ on a bien un opérateur pseudo-différentiel (de symbole $b_{k+1,t} = b_{k,t} - c_{k+1,t}$) qui vérifie (3.9).

Etape 3 : Théorème de Beals et conclusion.

On vérifie dans un premier temps que l'on approche bien B par B_k à un ordre de plus en plus élevé en h. Comme dans l'étape 1, l'équation $hD_tB_k(t) = [Q(t), B_k(t)] + E_k(t)$ donne

$$hD_t(F(t)B_k(t)F(t)^*) = F(t)E_k(t)F(t)^*.$$

On en déduit, en intégrant et en multipliant par i/h (c.f étape 1) :

$$\begin{aligned} B(t) - B_k(t) &= F(t)^* \left(A - F(t)B_k(t)F(t)^*\right) F(t) \\ &= \frac{i}{h} F(t)^* \left(\int_0^t F(s)E_k(s)F(s)^* ds \right) F(t) \\ &= O_{L^2 \to L^2}(h^{k+1}). \end{aligned}$$

A ce stade, si l'on parvient à montrer que $B(t)$ est effectivement un opérateur pseudo-différentiel, alors le calcul précédent permet de conclure. On utilise le théorème de Beals : soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $l_1, \ldots, l_N$ des formes linéaires de $\mathbb{R}^{2n}$; montrons que

$$ad_{l_1(x,hD)} \ldots ad_{l_N(x,hD)}(B(t) - B_0(t)) = O_{L^2 \to L^2}(h^{N+1}).$$

En fait, on va montrer quelque chose d'un peu différent :

$$ad_{l_1(x,hD)} \ldots ad_{l_N(x,hD)}(B(t) - B_k(t)) = O_{L^2 \to L^2}(h^{k+1}). \tag{3.10}$$

Si cette dernière égalité est vraie, alors on peut en déduire la précédente en prenant $k = N$:

$$\begin{aligned} ad_{l_1(x,hD)} \ldots ad_{l_N(x,hD)}(B(t) - B_0(t)) &= ad_{l_1(x,hD)} \ldots ad_{l_N(x,hD)A}(B(t) - B_k(t) + B_k(t) - B_0(t)) \\ &= O_{L^2 \to L^2}(h^{N+1}) + O_{L^2 \to L^2}(h^{k+1}) \\ &= O_{L^2 \to L^2}(h^{N+1}) \end{aligned}$$

En effet pour tout opérateur pseudo-différentiel $P = p^W$, $p \in S$, on a $ad_{l_1(x,hD)} \ldots ad_{l_N(x,hD)}P = O_{L^2 \to L^2}(h^{N+1})$ (développement asymptotique d'un commutateur). Il ne nous reste plus qu'à montrer (3.10).

Commençons par le cas $N = 1$. On se donne une forme linéaire $l \in \left(\mathbb{R}^{2n}\right)^*$ et on utilise l'expression intégrale précédemment obtenue de $B(t) - B_k(t)$ ainsi que la linéarité de ad_l pour obtenir

$$ad_l(B(t) - B_k(t)) = \frac{i}{h} \left(\int_0^t ad_l(F(t)^*F(s)E_k(s)F(s)^*F(t))ds \right).$$

En utilisant là encore le développement asymptotique de commutateurs, on obtient $\frac{i}{h} ad_l(E_k(s)) = O_{L^2 \to L^2}(h^{k+1})$. Ensuite on se propose de montrer que

$$ad_{l_1(x,hD)} \ldots ad_{l_N(x,hD)}(F(t)) = O_{L^2 \to L^2}(1).$$

c'est à dire que $ad_{l_1(x,hD)}\dots ad_{l_N(x,hD)}(F(t))$ est un opérateur linéaire *borné* de L^2. On remarque pour cela que

$$\begin{aligned} ad_l(hD_tF(t)) = [l, hD_tF(t)] &= lhD_tF(t) - (hD_tlF(t) - hD_tlF(t)) - hD_tF(t)l \\ &= ad_l(hD_t)F(t) + hD_tad_l(F(t)) \\ &= hD_tad_l(F(t)). \end{aligned}$$

donc d'après l'équation $hD_tF(t)+Q(t)F(t) = 0$ vérifiée par $F(t)$, le commutateur $ad_l(F(t))$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} hD_tad_lF(t) + (ad_lQ)F(t) &= -Q(t)ad_lF(t), \quad t \in [0,T] \\ ad_l(F(0)) &= 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Donc

$$\begin{aligned} hD_t(F(t)^*ad_lF(t)) &= (hD_tF(t)^*)ad_lF(t) + F(t)^*hD_tad_lF(t) \\ &= (F(t)^*Q(t))ad_lF(t) + F(t)^*(-(ad_lQ)F(t) - Q(t)ad_lF(t)) \\ &= -F(t)^*ad_l(Q)F(t). \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t et en multipliant par i/h on obtient finalement

$$ad_lF(t) = \frac{-i}{h}F(t)\int_0^t F(s)(ad_lQ)F(s)ds.$$

Ici Q est un opérateur pseudo-différentiel et donc $\frac{1}{h}ad_lQ$ est un opérateur borné de L^2. Ainsi, en se restreignant à l'intervalle $t \in [0,T]$, on en déduit que $ad_lF(t)$ est aussi un opérateur borné de L^2. En itérant on en déduit que $ad_{l_1(x,hD)}\dots ad_{l_N(x,hD)}(F(t))$ est borné sur L^2.

De tout cela on déduit de l'expression intégrale de $ad_l(B(t) - B_k(t))$ que $ad_l(B(t) - B_k(t)) \in O_{L^2\to L^2}(h^{k+1})$. En itérant là encore on montre que pour $l_1, \dots, l_N$ l'équation (3.10) est vérifiée, et donc le théorème de Beals aussi. Ainsi, $B(t)$ est bien un opérateur pseudo-différentiel et donc on a bien le résultat annoncé. ☐

Remarque

La preuve montre que si $a \sim \sum_{k=0}^{+\infty} h^k a_k$, alors il existe $(b_k)_{k\geq 1} \subset S$ tels que $b_t \sim \kappa^* a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} h^k b_k$.

3.3 Déformation de symplectomorphismes

Nous avons maintenant à notre disposition le théorème 4 d'Egorov, qui permet de transformer un opérateur pseudo-différentiel en un autre opérateur différentiel B choisi à notre convenance (ici, on voudra *in fine* prendre B "proche"[10] de hD_{x_1}). Pour peu que l'on puisse choisir le bon symplectomorphisme κ qui transforme $a(x,\xi)$ en ξ, c'est à dire tel que

$$\kappa^* a(x,\xi) = \xi_1$$

10. au sens par exemple du théorème d'Egorov, c'est à dire à $O_{L^2\to L^2}(h)$ près.

on pourra obtenir au moins approximativement (à l'ordre 1 en h) l'opérateur voulu (voir théorème 9). Si l'on laisse le problème caché derrière le mot "approximativement" pour plus tard (partie 4), il nous reste pour le moment la difficulté de choisir ce κ. Si l'on regarde attentivement le cadre du théorème d'Egorov, on voit qu'il nous faut également construire une famille adaptée de symboles $\{q_t, t \in [0,1]\}$. On résume et traite cette difficulté dans le théorème suivant :

Théorème 6 (Déformation de symplectomorphismes)

Soit U_0 un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ étoilé en 0. Soit $\kappa : U_0 \to U_1 := \kappa(U_0)$ un symplectomorphisme s'annulant en 0. Alors il existe une famille de symplectomorphismes $(\kappa_t)_{t\in[0,1]}$ définis de U_0 vers U_1 ainsi qu'une famille $(q_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{C}^\infty(U_0,\mathbb{R})$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux par rapport à t et telles que

- $\forall t \in [0,1]$, $\kappa_t(0) = 0$,
- $\kappa_0 = I$, $\kappa_1 = \kappa$,
- $\forall t \in [0,1]$, $\partial_t \kappa_t = (\kappa_t)_* H_{q_t}$.

La démonstration de ce théorème s'appuie largement, comme beaucoup de théorèmes d'équations différentielles non linéaires, sur une version linéaire de ce théorème. Pour déformer des matrices symplectiques, on suit et détaille la méthode utilisée dans [Zwo04], qui est d'identifier les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à des matrices symplectiques orthogonales de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$:

Lemme 5 (Identification complexe de matrices symétriques orthogonales)

On considère l'application

$$\Phi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \\ M = M_1 + iM_2 & \mapsto & \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $M_1 = \Re(M)$ et $M_2 = \Im(M)$. Alors :

1. Φ est un morphisme d'algèbres.
2. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \Phi(\exp(M)) = \exp(\Phi(M))$.
3. Φ fournit une correspondance (bijection) entre les ensembles suivants :
   (a) $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \leftrightarrow \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$
   (b) $\mathscr{H}_n(\mathbb{C}) \leftrightarrow \mathscr{S}_{2n}(\mathbb{R})$
   (c) $\mathscr{A}\mathscr{H}_n(\mathbb{C}) \leftrightarrow \mathscr{A}\mathscr{S}_{2n}(\mathbb{R})$

Preuve. Si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a :

- $\Phi(MN) = \Phi\begin{pmatrix} M_1N_1 - M_2N_2 & M_1N_2 + M_2N_1 \\ -M_2N_1 - M_1N_2 & -M_2N_2 + M_1N_1 \end{pmatrix}$
- $\Phi(M)\Phi(N) = (M_1 + iM_2)(N_1 + iN_2) = (M_1N_1 - M_2N_2) + i(M_1N_2 + M_2N_1)$

d'où la multiplicativité. Ensuite, $\Phi(I_n) = I_{2n}$ et par linéarité de la partie réelle et imaginaire, Φ est linéaire. C'est donc bien un morphisme d'algèbres.

Ensuite, $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ étant linéaire, elle est continue (dimension finie) et donc

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(\exp(M)) = \Phi\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi\left(\frac{M^k}{k!}\right) = \exp(\Phi(M))$$

On s'intéresse enfin aux correspondances annoncées.

1. On vérifie que $M \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ équivaut aux conditions du lemme 3. En effet :

$$M \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \iff M^*M = I_n \iff (M_1M_1^T - M_2^TM_2) + i(-M_1M_2^T + M_2M_1^T)$$

   En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient bien les deux conditions $M_1M_1^T = M_2M_2^T$ et $M_1M_2^T = M_2M_1^T$ du lemme 3, d'où la correspondance.
2. On remarque que $M \in \mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ équivaut à $M^* = M$ c'est à dire, en identifiant parties réelles et imaginaires, $M_1^T = M_1$ et $M_2^T = -M_2$. On voit que c'est équivalent à dire que $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{pmatrix}$ est symétrique.
3. De même, $M \in \mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ équivaut à $M_1^T = -M_1$ et $M_2^T = +M_2$, c'est à dire à $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{pmatrix}$ antisymétrique.

$\square$

Lemme 6 (Décomposition de matrices symplectiques)

Soit $K \in \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(A, B) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telles que

- $K = e^Be^A$
- A est symétrique et vérifie $A^TJ + JA = 0$
- B est antisymétrique et vérifie $B^TJ + JB = 0$

Preuve. On utilise une décomposition polaire sur K. Puisque K est symplectique, elle est inversible et la décomposition

$$K = QP$$

avec $(Q, P) \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$ est unique. En particulier de la relation $K^{-1} = -JK^TJ$ on tire $P^{-1}Q^{-1} = JP^T(J^TJ)Q^TJ^T = (JP^TJ^T)(JQ^TJ^T)$. De plus,

- (JP^TJ^T) est symétrique définie positive car symétrique et $\langle JP^TJ^Tx, x\rangle = \langle P^TJ^Tx, J^Tx\rangle = \langle P^TJx, Jx\rangle \geq 0$, et cette quantité est nulle ssi x est nul car $P^T \in \mathscr{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$.

- (JQ^TJ^T) est orthogonale : $(JQ^TJ^T)^T(JQ^TJ^T) = JQJ^TJQ^TJ^T = JQQ^TJ^T = JJ^T = I_{2n}$.

Par unicité de la décomposition polaire, il vient

- $P^{-1} = JP^TJ^T$
- $Q^{-1} = JQ^TJ^T$

et donc P et Q sont symplectiques. Cette information nous sera utile pour montrer les relations entre A, B (à défninir) et J.

Etape 1 : Montrons que $P = e^A$ avec A comme annoncé.

D'après le théorème spectral, P est diagonalisable en base orthonormée : il existe R orthogonale et $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ tels que $P = R\,\mathrm{diag}((\lambda_k)_{k\in[\![1,n]\!]}R^T$. En posant $D = \mathrm{diag}((\ln(\lambda_k))_{k\in[\![1,n]\!]})$ et $A = RDR^T$ on obtient $e^A = P$.

De plus A est symétrique et vérifie

$$(e^A)^{-1} = P^{-1} = J^TP^TJ = e^{J^TAJ}$$

et donc par injectivité $A = J^TAJ$ i.e $AJ + JA = 0$.

Etape 2 : Montrons que $Q = e^B$ avec B comme annoncé.

Ici, on aimerait dans l'idéal procéder comme précédemment en prenant un logarithme des valeurs propres de Q, sauf que nous ne sommes pas assurés que celles-ci soient positives. Une des manières de procéder est de montrer que la version complexe de Q est en fait unitaire. La correspondance unitaire $\leftrightarrow$ symplectique-orthogonale prouvée précédemment nous permettra de remonter à des matrices à coefficients réels (ce qui n'était à priori pas gagné car les logarithmes des valeurs propres de Q n'ont aucune raison d'être réels).

Puisque Q est symplectique et orthogonale, le lemme 3 nous permet d'identifier Q avec une matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à savoir $\Phi^{-1}(Q)$. On diagonalise dans $\mathbb{C}$ cette matrice unitaire (qui est normale donc diagonalisable via une autre matrice unitaire) : il existe $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $\Delta = \mathrm{diag}((\delta_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale telles que $\Phi^{-1}(Q) = U\Delta U^*$. Puisque $\Phi^{-1}(Q)$ est unitaire, $|\delta_k| = 1$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. En choisissant un argument θ_k pour chaque $\delta_k = e^{i\theta_k}$ on peut poser

$$\Theta := U^*\,\mathrm{diag}((i\theta_k)_{k\in[\![1,n]\!]}U$$

pour avoir $e^\Theta = \Phi^{-1}(Q) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le lemme 5 d'identification nous permet d'affirmer que $e^B = Q \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ avec $B := \Phi(\Theta) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Il ne nous reste plus qu'à montrer les deux propriétés annoncées sur B. L'antisymétrie de B provient du fait que Θ est antihermitienne. Enfin, $B = \Phi(\Theta) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{pmatrix}$ donc B commute avec J. Ainsi :

$$B^TJ + JB = -BJ + JB = -JB + JB = 0.$$

$\square$

Remarque

> En fait, on peut montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $A^T J + JA = 0$ a son exponentielle symplectique, et même plus : e^{tA} est symplectique pour tout t. Pour cela, on peut par exemple dériver la fonction $\varphi(t) := \left(e^{tA}\right)^T Je^{tA} = e^{tA^T} Je^{tA}$. On obtient
>
> $$\partial_t \varphi(t) = A^T e^{tA^T} Je^{tA} + e^{tA^T} JAe^{tA} = e^{tA^T}(A^T J + JA)e^{tA} = 0$$
>
> d'où $\varphi(t) = \varphi(0) = I$. Donc e^{tA} est symplectique pour tout t. Cet exemple fournit une manière de fabriquer une famille de symplectomorphismes qui vérifie une équation différentielle en temps (ici $\partial_t \kappa_t = A\kappa_t$).

Preuve du théorème de déformation. On sépare la preuve en deux étapes, en commençant par le cas linéaire.

Etape 1 : Cas linéaire.

On suppose d'abord que κ est un endomorphisme de matrice $K \in \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$. On note $K = e^B e^A$ en reprenant les notations du lemme 6. Le candidat est alors

$$K_t := e^{tB} e^{tA}.$$

Dans la suite, on se sert de ce candidat comme point d'appui pour le cas non linéaire, et il n'y a pas besoin de prouver que K_t satisfait aux conditions du théorème. Cependant c'est bien le cas, on pourra pour voir cela consulter la section 11.3 de [Zwo04].

Etape 2 : Cas non linéaire.

On pose $K := \partial\kappa((0,0))$ et on reprend la notation précédente $K = e^B e^A$. On pose, pour tout $t \in [0,1]$,

$$K_t := e^{tB} e^{tA}.$$

On considère la famille de symplectomorphismes κ_t, construite par morceaux sur $[0,1]$ et passant par le symplectomorphisme $\kappa_{1/2} := K_1^{-1} \circ \kappa$. Plus précisément :

$$\kappa_t : z \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2t}\kappa_{1/2}(2tz) \text{ pour } t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\ K_1^{-1} \circ \kappa(z) \text{ pour } t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Cela définit bien κ_t pour tout t car $2tz \in U_0$ car U_0 est étoilé. De plus, les définitions coïncident bien en $1/2$, et en $t \to 0$ on a

$$\kappa_{1/2}(z) = \frac{1}{2t}e^{-tA}e^{-tB} \circ \kappa(z) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2t}e^{-tA}e^{-tB}(\kappa(0) + \partial\kappa(0).2tz + O(|tz|^2)) = \frac{2t}{2t}K_t^{-1}Kz + O(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} z.$$

De plus, κ_t est bien un symplectomorphisme par composition et inverse de symplectomorphismes. On admet ici le caractère $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux de $t \mapsto \kappa_t$.

Il ne nous reste plus qu'à trouver q_t. Pour cela, nous allons procéder à un calcul de dérivée de Lie. On note $\sigma := \sigma$ et on considère le champ de vecteurs $V_t := \partial_t \kappa_t$, et notre objectif est de montrer que $d(V_t \lrcorner \sigma) = 0$ afin d'utiliser le lemme de Poincarré (qui nous fournira q_t). D'après la formule de Cartan, on a

$$\mathcal{L}_{V_t}\sigma = V_t \lrcorner d\sigma + d(V_t \lrcorner \sigma)$$

et $d\sigma = 0$ car $\sigma = d\omega$ avec $\omega = \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j$. D'autre part, par défnition de la dérivée de Lie par rapport à V_t on a

$$\mathcal{L}_{V_t}\sigma = \partial_t(\kappa_t^*\sigma) = \partial_t\sigma = 0$$

car κ_t est symplectique. Ainsi, on en déduit que $d(V_t \lrcorner \sigma) = 0$. D'après le lemme de Poincarré, puisque σ est une $2-$ forme il existe q_t une $0-$forme, c'est à dire une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, telle que $V_t \lrcorner \sigma = -dq_t$. Or par définition du champ H_{q_t} engendré par q_t on a $-dq_t = H_{q_t} \lrcorner \sigma$. On a donc

$$\kappa_t^*(V_t \lrcorner \sigma) = H_{q_t} \lrcorner \sigma.$$

D'une part, $\kappa_t^*(V_t \lrcorner \sigma) = (\kappa_t^* V_t) \lrcorner (\kappa_t^*\sigma) = (\kappa_t^* V_t) \lrcorner \sigma$. D'autre part, d'après la propriété 4, $\kappa_t^* V_t = H_q$, ou encore :

$$\partial_t \kappa_t = (\kappa_t)_* H_q.$$

□

Dans le théorème précédent, nous avons supposé que κ était défini seulement sur un ouvert étoilé U_0, cependant rappelons que notre objectif est d'appliquer le théorème d'Egorov, qui s'applique sur des symplectomorphismes définis sur $\mathbb{R}^{2n}$ tout entier. On a donc besoin de prolonger les κ_t précédemment obtenus.

Théorème 7 (Déformation et prolongement de symplectomorphismes)

Soit U_0 un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ étoilé en 0 que l'on suppose de plus borné (en fait, relativement compact). Soit $\kappa : U_0 \to U_1 := \kappa(U_0)$ un symplectomorphisme s'annulant en 0. On suppose que κ s'étend sur un ouvert V_0 contenant le compact $\overline{U_0}$ et que V_0 est également étoilé en 0.

Alors κ se prolonge en un symplectomorphisme $\tilde{\kappa}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ qui est égal à I en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^{2n}$. De plus, il existe une famille de symplectomorphismes $(\tilde{\kappa}_t)_{t\in[0,1]}$ définis sur $\mathbb{R}^{2n}$ ainsi qu'une famille $(\tilde{q}_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{C}^\infty(V_0, \mathbb{R})$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux par rapport à t et telles que

- $\forall t \in [0,1]$, $\tilde{\kappa}_t(0) = 0$,
- $\tilde{\kappa}_0 = I$, $\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}$,
- $\forall t \in [0,1]$, $\partial_t \tilde{\kappa}_t = (\tilde{\kappa}_t)_* H_{q_t}$.

Preuve. Tout d'abord, on précise que l'on entend par "prolongement" une fonction $\mathcal{C}^\infty$ symplectique définie sur V_0 et coïncidant avec κ sur U_0. Dans la suite, on confond κ et son prolongement à V_0. On applique alors le théorème précédent, qui fournit une famille $(q_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{C}^\infty(V_0, \mathbb{R})$. L'idée est, au lieu de prendre la famille de symplectomorphismes directement donnée par le théorème précédent, de transformer $\tilde{q}_t$ en q_t ayant un support compact.

Pour cela, on considère $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(V_0, \mathbb{R})$ une fonction plateau valant 1 sur $\overline{U_0}$ et on pose $q_t := \chi \tilde{q}_t$. On obtient alors $q_t \in \mathcal{C}^\infty(V_0, \mathbb{R})$, et on peut définir $\tilde{\kappa}_t$ grâce au problème de Cauchy associé à l'EDO d'ordre 1

$$\forall t \in [0,1],\ \partial_t \tilde{\kappa}_t = (\tilde{\kappa}_t)_* H_{q_t}$$

et aux conditions $\tilde{\kappa}_0 = I$, $\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}$, $\forall t \in [0,1]$, $\tilde{\kappa}_t(0) = 0$. C'est le théorème 3.3. Enfin, puisque q_t est à support compact, on a $\partial_t \tilde{\kappa}_t = 0$ sauf sur un compact. Donc $\tilde{\kappa}_t$ vaut I sauf sur un compact. $\square$

3.4 Quantification de symplectomorphismes

A ce stade, nous sommes parvenus à déformer d'une manière qui nous convenait des symplectomorphismes. Maintenant, il s'agit de passer du côté des opérateurs. C'est le rôle du théorème suivant.

Théorème 8 (Quantification de symplectomorphismes)

Soit $\kappa : U_0 \to U_1$ un symplectomorphisme comme dans le théorème 7. Alors il existe un opérateur unitaire $F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que pour tout $a \in S(m)$,

$$F^{-1} a^W(x, hD) F = b^W(x, hD)$$

où $b \in S(m)$ est un symbole vérifiant

$$b_{|U_0} = \kappa^* \left(a_{|U_1} \right) + O_S(h).$$

On peut reformuler ceci avec le vocabulaire de la définition 8 :

$$F^{-1} a^W(x, hD) F \equiv b^W(x, hD)$$

microlocalement sur un voisinage de $(0,0)$, où $b \in S(m)$ est un symbole vérifiant

$$b = \kappa^* a + O_S(h).$$

Preuve. On applique le théorème 7 pour obtenir une famille de symplectomorphismes κ_t définis sur $\mathbb{R}^{2n}$ et une famille $(q_t) \subset \mathcal{C}^\infty(V_0)$ tels que $\partial_t \kappa_t = (\kappa_t)_* H_{q_t}$ pour $t \in [0,1]$. On applique alors le théorème d'Egorov à κ_t : il existe alors une famille d'opérateurs unitaires $F(t)$ tels que

$$F(t)^{-1} a^W(x, hD) F(t) = b_t^W(x, hD)$$

avec $b_t \in S(m)$ vérifiant

$$b_t(x, \xi) = \kappa_t^* a(x, \xi) + O_S(h).$$

Ainsi, en prenant $F := F(1)$, on a bien, en restreignant b à U_0, le résultat annoncé. $\square$

4 Formes normales et conclusion de la preuve

4.1 Théorème des formes normales

Théorème 9 (Forme normale d'un opérateur réel de type principal)

Soient $p \in S(m)$ et $P = p^W(x, hD)$ un opérateur réel de type principal. Alors il existe :

1. Un symplectomorphisme κ défini au voisinage de $(0,0)$ tel que $\kappa(0,0) = (0,0)$ et
$$\kappa^* p_0 = \xi_1$$
2. Un opérateur T, quantifiant κ^{-1} au sens du théorème 8, tel que T^{-1} existe dans un voisinage microlocal de (0,0) et tel que
$$TPT^{-1} \equiv hD_{x_1}.$$
microlocalement en $(0,0)$.

Preuve. Pour le premier point, on utilise le théorème 10 de Darboux avec $B = \emptyset$ et $A = \{1\}$. On a en effet $\{p_0, p_0\} = 0$. Ce théorème nous donne exactement un symplectomorphisme κ défini au voisinage de $(0,0)$ tel que $\kappa(0,0) = (0,0)$ et
$$\kappa^* p_0 = \xi_1.$$

Il nous reste à montrer le second point. Pour cela, on va appliquer une version locale du théorème d'Egorov, c'est à dire le théorème 8. Quitte à restreindre le voisinage ouvert précédemment obtenu et prendre une boule ouverte (convexe donc étoilée) on peut supposer les hypothèses du théorème 8 vérifiées. Ainsi, il existe T_0 une quantification de κ^{-1} telle que
$$T_0 P T_0^{-1} \equiv b^W(x, hD)$$
microlocalement en $(0,0)$ avec $b = \kappa^* p_0 + O_S(h)$. On réécrit cette équation sous la forme
$$T_0 P T_0^{-1} \equiv hD_{x_1} + E$$
microlocalement en $(0,0)$ et où $E = e^W(x, hD)$ et $e \in hS$.

On se donne maintenant pour objectif de se débarrasser de ce $O(h)$, quitte à transformer T_0 en un T bien choisi. Plus précisément, on va modifier pas à pas via une récurrence ce $O(h)$ en $O(h^{k+2})$, $k \in \mathbb{N}$, pour aboutir sur le $O(h^\infty)$ voulu.

Notre but : trouver un opérateur $A = a^W$ tel que

1. a soit elliptique
2. $hD_{x_1} + E = A(hD_{x_1})A^{-1}$.

Le premier point permettra notamment d'inverser l'opérateur A. On pourra se référer au chapitre 4 de [Lou20] ou au chapitre 4.7 de [Zwo04]. Concernant le second point, on en choisit une formulation différente :

$$hD_{x_1} + E = A(hD_{x_1})A^{-1} \iff hD_{x_1}a - ahD_{x_1} + EA = A \iff [hD_{x_1}, A] + EA = 0.$$

Cette formulation rend plus agréable l'écriture de la propriété de récurrence que l'on se propose de prouver :

$$\mathcal{P}_k : \forall j \in [\![0, k]\!],\ \exists c_k \in S,\ [hD_{x_1}, c_k^W] + E \circ c_k^W = O_{L^2 \to L^2}\left(h^{k+2}\right). \tag{4.1}$$

Commençons par montrer que $\mathcal{P}_0$ est vraie. D'après la remarque qui suit le théorème 4 d'Egorov, $E = e^W(x, hD)$ avec $e(x, \xi) \sim he_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} h^{k+1} e_k$. On cherche alors un symbole $a_0 \in S$ elliptique en $(0, 0)$ tel que

$$\frac{1}{i}\{\xi_1, a_0\} + e_0 a_0 = 0. \tag{4.2}$$

Ce qui nous motive à résoudre cette équation en a_0 est le calcul suivant, qui s'appuie sur les développements asymptotiques de la composition et du commutateur d'opérateurs pseudo-différentiels (c.f [Lou20] ch. 2 ou [Zwo04] ch. 4). Supposons (4.2) vérifiée. On a alors, en notant $A_0 = a_0^W(x, hD)$:

- $[hD_{x_1}, A_0] = \dfrac{h}{i}\{\xi_1, a_0\}^W + O_{L^2 \to L^2}(h^3) = (-he_0 a_0)^W + O_{L^2 \to L^2}(h^3)$
- $EA_0 = \left(he_0 a_0 + \dfrac{h}{2i}\{he_0, a_0\} + O_S(h^2)\right)^W.$

On en déduit donc

$$[hD_{x_1}, A_0] + EA_0 = \frac{ih^2}{2}\{e_0, a_0\}^W + O_{L^2 \to L^2}(h^2) = O_{L^2 \to L^2}(h^2)$$

D'autre part, l'équation 4.2 n'est rien d'autre qu'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 dans $\mathbb{R}$. Ici le voisinage U_0 considéré est borné, donc la fonction $F(x_1, a_0(x_1) = -e_0(x_1)a_0(x_1)$ est globalement lipschitzienne [11]. On peut prendre par exemple $a(0) = 1$, ce qui assure que a_0 est non nulle au voisinage de 0. On a alors un problème de Cauchy et donc on peut bien trouver a_0 qui vérifie les conditions recherchées. On pose alors $c_0 := a_0$

On suppose maintenant $\mathcal{P}_k$ vraie. En cherchant un raisonnement proche du précédent, on est amené à chercher un a_{k+1} qui vérifie

$$\frac{h^{k+2}}{i}\{\xi_1, a_{k+1}\} + h^{k+2} e_0 a_{k+1} = r_k.$$

L'idée vient naturellement une fois que l'on développe $[hD_{x_1}, c_k^W] + E \circ c_k^W$ et en cherchant comment annuler le terme en r_k^W. La justification de l'existence d'un tel a_{k+1} vérifiant de plus $a_{k+1}(0) \neq 0$ provient comme précédemment d'une formulation en problème de Cauchy.

11. On considère temporairement a_0 comme une fonction d'une variable réelle x_1 quitte à fixer les $2n - 1$ autres.

Vérifions que $c_{k+1} = c_k + h^{k+1}a_{k+1}$ et $C_{k+1} = c_{k+1}^W$ sont les bons candidats. On a

$$[hD_{x_1}, C_{k+1}] = r_k^W + [hD_{x_1}, h^{k+1}a_{k+1}] = r_k^W + h^{k+1}\left(\frac{h}{i}\{\xi_1, a_{k+1}\} + O_{L^2\to L^2}(h^3)\right)$$

et

$$EC_{k+1} = EC_k + \left(h^{k+2}e_0 a_{k+1} + O_S(h^2)\right)^W$$

d'où

$$[hD_{x_1}, C_{k+1}] + EC_{k+1} = r_k^W + -r_k^W + O_{L^2\to L^2}(h^{k+3}) = O_{L^2\to L^2}(h^{k+3})$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée à partir de $\mathcal{P}_k$.

On remarque par ailleurs que dans ce calcul, le gain en $O(h^3)$ plutôt qu'en $O(h^2)$, qui est spécifique à la quantification de Weyl, n'est pas indispensable.

Pour conclure, on fait appel au théorème de Borel. En considérant la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de symboles précédemment construite, il existe d'après ce théorème un symbole a tel que $a \sim \sum_{k=0}^{+\infty} h^k c_k$. Par ellipticité de chaque c_k, a est elliptique et donc $A = a^W(x, hD)$ est inversible. Ainsi en posant $T := A^{-1}T_0$ on obtient

$$TPT^{-1} = A^{-1}T_0PT_0^{-1}A = A^{-1}\left(hD_{x_1} + E\right)A = A^{-1}hD_{x_1}A + A^{-1}EA = hD_{x_1} + O(h^\infty)$$

ce qui est le résultat qu'on voulait montrer. □

4.2 Conclusion

On reprend la preuve du théorème 1 où nous l'avions laissée.

On rappelle que l'on voulait montrer que l'ensemble $G = \{t \in (a,b), e^{tH_p}(x_0, \xi_0) \in WF_h(u)\}$ est ouvert. On commence par appliquer le théorème 9 des formes normales pour se ramener au cas $p(x,\xi) = \xi_1$. Soient κ et T comme dans ce théorème, c'est à dire

$$\kappa^* p_0 = \xi_1$$

avec $\kappa(0,0) = (0,0)$ et T quantifiant κ^{-1} au sens du théorème 8 tel que

$$TPT^{-1} \equiv hD_x$$

microlocalement en $(0,0)$. On note V un voisinage de $(0,0)$ tel que l'équivalence précédente soit valide. On remarque alors que

$$WF_h(Tu) \cap \kappa(V) = \kappa\left(WF_h(u) \cap V\right).$$

En effet, dans la preuve du théorème des formes normales on voit que $T = A^{-1}T_0$ avec A un opérateur pseudo-différentiel et T_0 un opérateur unitaire de L^2. En particulier d'après la propriété 6 appliquée à A et à A^{-1} (double inclusion) il vient

$$WF_h(A^{-1}T_0u) = WF_h(T_0u).$$

Pour conclure, nous avons besoin d'un résultat analogue au théorème 11 qui faisait l'objet du rapport de stage [Lou20]. Ce théorème stipulait que, dans le cas où $q_t = q$ était indépendant du temps, alors $WF_h(e^{itQ/h}) = e^{tH_q}(WF_h(u))$. On admet que cela reste toujours vrai en remplaçant l'opérateur intégral de Fourier $e^{itQ/h}$ par T_0 et e^{tH_q} par κ.

Cette remarque nous permet de montrer que

$$\begin{aligned} G = \{t \in (a,b), e^{tH_p}(x_0,\xi_0) \in WF_h(u)\} &= \{t \in (a,b), \kappa_* e^{tH_p}(x_0,\xi_0) \in WF_h(Tu)\} \\ &= \{t \in (a,b), (t,0,0,0) \in WF_h(Tu)\} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que G' est ouvert. On commence par montrer que c'est un voisinage de $0_{\mathbb{R}}$. C'est exactement ce que nous avons démontré en section 1.3. Pour montrer que c'est un voisinage de ses autres points, il suffit d'appliquer la même méthode utilisée en $t = 0$ en un autre point t_0 de G. Plus précisément, on se donne un autre κ (et un autre T associé) tel que $\kappa(x_0,\xi_0) = (t_0,0,0,0)$ et on répète la méthode précédente.

A Théorème de Darboux

On présente le théorème de Darboux, point important de la partie classique (symboles) du théorème des formes normales. L'énoncé choisi est celui que l'on peut trouver dans [HH94] (théorème 21.1.6). Dans ce livre, la preuve fait appel à un théorème de géométrie différentielle dû à Frobenius. On pourra aussi en trouver une autre version dans [Laf96] sous la forme d'un exercice guidé (exercice 14 du chapitre V).

Théorème 10 (Darboux)

Soit M une variété sympelctique de dimension $2n$ et A, B deux sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$. Soit $\gamma \in M$. Soient $(q_j)_{j\in A}$ et $(p_k)_{k\in B}$ des fonctions définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de γ. On suppose que ces fonctions vérifient les relations de commutation suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \{q_i, q_j\} & = 0 & (i,j) \in A \\ \{p_i, p_k\} & = 0 & (i,k) \in B \\ \{q_j, p_k\} & = \delta_{j,k} & (j,k) \in A \times B. \end{array}\right.$$

Alors il existe des coordonnées locales (x, ξ) en γ telles que $x_j = q_j$ et $\xi_k = p_k$ pour $(j,k) \in A \times B$ satisfaisant les relations de commutation

$$\left\{\begin{array}{cll} \{x_i, x_j\} & = 0 & (i,j) \in A \\ \{\xi_i, \xi_k\} & = 0 & (i,k) \in B \\ \{\xi_k, x_j\} = -\{x_j, \xi_k\} & = \delta_{j,k} & (j,k) \in A \times B. \end{array}\right.$$

En d'autres termes, on peut compléter un système de fonctions lisses en un système de coordonnées locales sous réserve qu'elles valident les conditions de commutation nécessaires.

Changelog

Je remercie encore une fois mon tuteur monsieur Fujiie pour la relecture attentive de mon mémoire. Il restait cependant des erreurs qui nous ont échappées à tous les deux, et qui sont répertoriées à titre informatif ci-dessous. Merci aux personnes qui m'ont fait des retours sur le sujet.

A.1 2022/06/27

1. Correction de quelques erreurs de frappe sur l'actuelle page 43 (preuve du théorème 9).
2. Correction du développement asymptotique qui était erroné (dans cette même preuve).

A.2 2022/06/28

1. Correction de quelques erreurs de frappe sur l'actuelle page 6. Merci à Taira K.

A.3 2022/07/08

1. Modification de l'exemple peu édifiant donné après la proposition 10. Remplacé par un exemple qui, il me semble, a plus de sens. Merci à Hugo.
2. Correction de diverses fautes de frappes au sein de la section 2.1. Merci à Hugo.

A.4 2023/03/23

1. Correction de quelques erreurs de typographie page 26.

Références

[BW97] Sean Bates and Alan Weinstein. *Lectures on the Geometry of Quantization*. 1997.

[HH94] Eduard Zehnder Helmut Hofer. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser, 1994.

[Hö07] Lars Hörmander. *Analysis of Linear Partial Differential Operators III : Pseudo-Differential Operators*. 2007.

[Laf96] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 1996.

[Lou20] Vincent Louatron. Analyse semiclassique et applications en physique quantique (stage master 1). 2020.

[Zwo04] Maciej Zworski. *Semiclassical analysis*. 2004.